ARIKETAK

1.-Aztertu ondorengo $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aplikazioa biderkadura eskalarra denentz: $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3$.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

f biderkadura eskalarra izango da baldin eta f forma bilineal, simetrikoa, ez-endakatua eta positiboki definitua bada.

f forma bilineala:

$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ denez f forma bilineala da. Gainera $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da.

f forma simetrikoa da $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrize simetrikoa delako.

f forma ez-endakatua da $det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$ delako.

f positiboki definitua izango da baldin eta $sig(f) = (3, 0)$ bada. Horretarako oinarri ortogonal bat lortuko dugu (bektore ez-isotropoen metodoa erabiliz):

Argi eta garbi $f(e_2, e_3) = 0$, $f(e_2, e_2) = 3$ eta $f(e_3, e_3) = 2$ ditugu. Orduan oinarri ortogonaleko bi bektore ditugu: e_2, e_3. Hirugarren $< e_2, e_3 >^\perp$ espaziotik aterako dugu: $< e_2, e_3 >^\perp = \langle(3, 1, 0)\rangle$. Orduan $\beta = \{e_2, e_3, (3, 1, 0)\}$ oinarri ortogonala da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ da. Ondorioz $sig(f) = (3, 0)$ da.

2.- Gram-Schmidten metodoa erabiliz, aurki ezazu $(E, \cdot)$ espazio euklidearraren oinarri ortonormal bat: $E = \langle(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 1)\rangle$ eta $(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = \sum_{i=1}^{4} x_iy_i$.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Gram-Schmidten metodoa erabiliz oinarri ortogonala lortuko dugu: $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$.

$u_1 = (1, -1, 0, 0)$

$u_2 = (0, 1, 1, 1) + \alpha(1, -1, 0, 0)$ erakoa izango da eta α lortzeko $u_2 \cdot u_1 = 0$ ekuazioa dugu: $0 = u_2 \cdot u_1 = -1 + 2\alpha$. Orduan $u_2 = (0, 1, 1, 1) + 1/2(1, -1, 0, 0) = (1/2, 1/2, 1, 1)$.

$u_3 = (2, 1, 0, 1) + \alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1, 1)$ erakoa izango da eta α, β lortzeko $u_3 \cdot u_1 = 0$ eta $u_3 \cdot u_2 = 0$ ekuazioak ditugu: $0 = u_3 \cdot u_1 = 1 + 2\alpha$eta $0 = u_3 \cdot u_2 = 5/2 + \beta 10/4$. Orduan $u_3 = (2, 1, 0, 1) + 1/2(1, -1, 0, 0) - (0, 1, 1, 1) = (5/2, -1/2, -1, 0)$.

Orduan $\beta = \{(1, -1, 0, 0), (1/2, 1/2, 1, 1), (5/2, -1/2, -1, 0)$ E-ren oinarri ortogonala da. Ortonormala bihurtzeko nahikoa da bektore bakoitzari bere norma zatitzea. Beraz:

$\beta' = \{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0), (1/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}),$

$(\sqrt{5}/\sqrt{6}, -1/\sqrt{30}, -2/\sqrt{30}, 0)\}$ E-ren oinarri ortonormala izango da.

3.- Diagonaldu ondorengo matrizea aldaketa matrize ortogonal baten bidez:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Lortu behar dugu P matrize ortogonal bat non ${}^tPAP = D$ diagonala den. Horretarako A-ri $f \in End(\mathbb{R}^3)$ endormofismoa egokituko diogu non $M_{\beta_k}(f) = A$ den. $\mathbb{R}^3$ ohiko biderkadura eskalarrarekin espazio euklidearra da eta f autoadjuntua da f-ri elkartutako matrizea β_k oinarri ortonormalarekiko simetrikoa baita. Orduan existitzen da bektore propioez osatutako oinarri ortonormala, β eta beraz $P = M_{\beta}^{\beta_k}$ matrize ortogonala izango da eta ${}^tPAP = D$ diagonala.

f-ren polinomio karakteristikoa: $\chi_f(x) = (x + 9)(x - 9)^2$. Azpiespazio propio bakoitzeko oinarri ortonormal bat lortu behar dugu:

$V(9) = \langle(4, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$. Orain, Gram-Schmidten metodoa erabiliz, azpiespazio honen oinarri ortogonala lortuko dugu: $\beta' = \{u_1, u_2\}$:

$u_1 = (4,1,0)$

$u_2 = (-1,0,1) + \alpha(4,1,0)$. Beraz $0 = u_2 \cdot u_1 = -4 + \alpha 17$ ekuaziotik $\alpha = 4/17$ lortzen dugu. Orduan $u_2 = (-1/17, 4/17, 1)$ da.

Azkenik oinarri ortonormala bihurtzeko norma zatitu behar diogu bektore bakoitzari: $\beta_{V(9)} = \{u_1/||u_1||, u_2/||u_2||\}$

$V(-9) = \langle(1,-4,1)\rangle$ denez $\beta_{V(-9)} = \{(1/3\sqrt{2}, -4/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}\}$ azpiespazioaren oinarri ortonormala da.

Orduan $\beta = \beta_{V(9)} \cup \beta_{V(-9)}$ eta $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ diagonala da.

PROBLEMA

1.- Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta f E-gaineko endomorfismoa. Froga ezazu ondorengo edozein bi baieztapenek hirugarren inplikatzen dutela:

(i) f endomorfismo autoadjuntua da.

(ii) f isometria da.

(iii) $f^2 = 1_E$ da.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

$(i),(ii) \Rightarrow (iii)$

f isometria denez $u \cdot v = f(u) \cdot f(v)$ betetzen da u eta v guztietarako. Gainera f autoadjuntua denez $f(u) \cdot f(v) = f^2(u) \cdot v$. Beraz $u \cdot v = f^2(u) \cdot v$. Hau da, $f^2(u) - u \in E^{\perp} = \{0\}$ u guztietarako.

$(i),(iii) \Rightarrow (ii)$

f autoadjuntua denez $f(u) \cdot f(v) = u \cdot f^2(v)$. Gainera $f^2 = 1_E$ izateagatiak $u \cdot f^2(v) = u \cdot v$. Hau da, $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$ eta honek frogatzen du f isometria dela.

$(ii),(iii) \Rightarrow (i)$

$f^2 = 1_E$ denez, $f(u) \cdot v = f(u) \cdot f(f(v))$. Gainera f isometria denez $f(u) \cdot f(f(v)) = u \cdot f(v)$. Ondorioz $f(u) \cdot v = u \cdot f(v)$ betetzen da u eta v guztietarako eta honek frogatzen du f autoadjuntua dela.