ARIKETAK

1.- Aztertu ondorengo $f : V \times V \to K$ aplikazioa forma bilineala denentz: $V = \mathbb{R}^2$,$K = \mathbb{R}$, $f((x_1, x_2),(y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1$. Forma bilineala bada aztertu simetrikoa denentz.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Argi eta garbi $f((x_1, x_2),(y_1, y_2)) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$ moduan adierazi ahal da non $X = (x_1x_2)$ eta $Y = (y_1y_2)$. Beraz f forma bilineala da eta gainera $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

f simetrikoa al da? Ikus dezakegunez $M_{\beta_k}(f)$ ez da simetrikoa beraz erantzuna ezezkoa da.

2.- Izan bitez $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala non elkartutako matrizea β oinarri kanonikoarekiko hurrengoa den:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu forma bilineal honen signatura.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Signatura lortzeko oinarri ortogonal bat behar dugu. Oinarri ortogonala lortzeko bektore ez-isotropoen metodoa jarraituko dugu.

Matrizea begiratuta ohartzen gara $(0, 1, 0)$ eta $(0, 0, 1)$ bektore ez-isotropoak direla eta beraien artean ortogonalak. Beraz hemen ditugu oinarri ortogonaleko lehenengo bi bektoreak. Hirugarrena $< (0, 1, 0),(0, 0, 1) >^{\perp}$ azpiespaziotik lortuko dugu.

$(x, y, z) \in < (0, 1, 0),(0, 0, 1) >^{\perp}$ baldin eta soilik baldin $x + y = 0 = -x - z$. Orduan $(1, -1, -1)$ izango da falta zaigun bektorea. Ondorioz $\beta = \{(0, 1, 0),(0, 0, 1),(1, -1, -1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala da f-rekiko eta

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrizea ikusita $sig(f) = (1,1)$ dela esan daiteke.

3.- Aztertu $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 9 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ kongrueteak direnentz, hots, existitzen bada $P \in GL(n, \mathbb{R})$ non $A = {}^tPBP$ den. Horrela denean aurkitu P.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Kongruenteak izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa da signatura berdinekoak izatea.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 9 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Definitzen dugu f $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineal simetrikoa non $M_{\beta_k}(f) = A$ den. Ohartu, $f(e_3, e_3) = 1$ denez, e_3 ez-isotropa dela. Gainera $< e_3 >^\perp = \langle (4,1,0,0), (-1,0,1,0), (3,0,0,1) \rangle$.

$f((-1,0,1,0),(-1,0,1,0)) = 1$ denez, ez-isotropa da eta beraz hau izango da oinarri ortogonaleko bigarren bektorea. Ohartu $< e_3, (-1,0,1,0) >^\perp = \langle (-1,5,0,0), (0,0,3,1) \rangle$.

$f((0,0,3,1),(0,0,3,1)) = -8$ denez, oinarri ortogonaleko hirugarren bektorea dugu. Gainera, $< e_3, (-1,0,1,0), (0,0,3,1) >^\perp = \langle (-1,1,2,-1) \rangle$.

Ondorioz $\beta = \{(0,0,1,0), (-1,0,1,0), (0,0,3,1), (-1,1,2,-1)\}$ oinarri ortogonala da f-rekiko eta $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3/\sqrt{8} & 2 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{8} & -1 \end{pmatrix}$ matrizea badugu orduan ${}^tP_1AP_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dugu. Hau da, $sig(A) = (2,1)$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Definitzen dugu g $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineal simetrikoa non $M_{\beta_k}(g) = B$ den. Ohartu, $g(e_1, e_1) = 2 = g(e_2, e_2)$ eta $g(e_1, e_2) = 0$. Hemen ditugu oinarri ortogonaleko lehenengo bi bektoreak. Gainera $< e_1, e_2 >^{\perp} = \langle(-2, 0, 1, 0), (-2, -1, 0, 1)\rangle$.

$g((-2, 0, 1, 0), (-2, 0, 1, 0)) = -2$ denez, ez-isotropa da eta beraz hau izango da oinarri ortogonaleko bigarren bektorea. Ohartu $< e_1, e_2, (-2, 0, 1, 0) >^{\perp} = \langle(2, -1, -2, 1)\rangle$.

Ondorioz $\beta' = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (2, -1, -2, 1))\}$ oinarri ortogonala da g-rekiko eta $P_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea badugu orduan ${}^tP_2BP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dugu. Hau da, $sig(B) = (2, 1)$.

Orduan A eta B kongruenteak dira eta ${}^tP_1AP_1 = {}^tP_2BP_2$ betetzen da eta beraz ${}^t(P_1P_2^{-1})A(P_1P_2^{-1}) = B$. $P = P_1P_2^{-1}$ izango da eskatzen diguten matrizea.

PROBLEMAK

1.- Izan bedi $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid deg(p) \leq 2\}$. Definitzen dugu $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ aplikazioa non $f(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ den.

(i) Froga ezazu f forma bilineal simetrikoa, ez endakatua eta positiboki definitua dela.

(ii) Aurkitu $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$-ren oinarri ortonormala f-rekiko.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

f forma bilineala da hurrengo baldintzak betetzen dituelako:

(i) $f(\alpha p_1(x)+\beta p_2(x), q(x)) = \int_{-1}^{1}(\alpha p_1(t)+\beta p_2(t))q(t)dt = \alpha \int_{-1}^{1} p_1(t)q(t)dt+ \beta \int_{-1}^{1} p_2(t)q(t)dt = \alpha f(p_1(x), q(x))+\beta f(p_2(x), q(x)), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eta $\forall p_1(x), p_2(x),$

$q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Era berean frogatzen da $f(p(x), \alpha q_1(x) + \beta q_2(x)) = \alpha f(p(x), q_1(x)) + \beta f(p(x), q_2(x)), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eta $\forall p(x), q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

f forma simetrikoa da $f(p(x), q(x) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt = \int_{-1}^{1} q(t)p(t)dt = f(q(x), p(x)$ betetzen delako beti.

f forma ez-endakatua da: $f(p(x), q(x) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt = 0$ bada $q(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ guztietarako, bereziki $q(x) = p(x)$ denean: $\int_{-1}^{1} p(t)^2 dt = 0$. Hau betetzen da baldin eta soilik baldin $p(x) = 0$ bada. Beraz $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ espazioaren ortogonaleko bektore bakarra 0 da.

f postiboki definitua da $f(p(x), p(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)^2 dt \geq 0$ betetzen dela $p(x)$ guztietarako.

(ii) Bektore ez-isotropoen metodoa jarraituz oinarri ortogonala lortuko dugu. 1 bektore ez-isotropoa da, $f(1, 1) = 2$ baita, eta $< 1 >^{\perp} = \langle x, 1-3x^2 \rangle$ da. Ohartu $f(x, x) = 2/3, f(x, 1-3x^2) = 0$ eta $f(1-3x^2, 1-3x^2) = 8/5$. Ondorioz $\beta = \{1, x, 1 - 3x^2\}$ oinarri ortogonala da eta beraz $\beta' = \{1/\sqrt{2}, x\sqrt{3}/\sqrt{2}, (1 - 3x^2)\sqrt{5}/2\sqrt{2}\}$ oinarri ortonormala da.