ARIKETAK

1.- Aztertu $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Jordanen matrize baten antzekoa denentz eta, horrela bada, lortu Jordanen matrizea eta aldaketa matrize bat.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Matrizearen polinomio karkateristikoa $\chi_A(x) = x^2(x+1)^2$ da. Beraz existitzen da P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = J$ Jordanen matrizea den. Polinomio karakteristikoa aztertuz bi azpiespazio orokortuak ditugu: $V^*(0)$ eta $V^*(-1)$. Bestalde A matrizeari $f \in End(\mathbb{R}^4)$ endomorfismo bat elkartu ahal diogu non $M_{\beta_k}(f) = A$ den. Teoriatik dakigu $J = \begin{pmatrix} J(0) & 0 \\ 0 & J(-1) \end{pmatrix}$ dela eta $P = M_\beta^{\beta_k}$ non $\beta = \beta_{V^*(0)} \cup \beta_{V^*(-1)}$ moduan lortzen dela. Ikusten denez ebazpena egiteko beharrezkoak ditugu azpiespazio orokortuak

$V^*(0)$ azpiespazioa:

Azpiespazio honi buruzko informazioa hauxe da: $V^*(0) = Kef^j$, $j \in \{1,2\}$ baterako eta $dimV^*(0) = m(0) = 2$. j lortzeko hurrengo nukleoarekin hasiko gara. $Ker(f)$kalkulatzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} -x-y-z-t &= 0 \\ y-t &= 0 \\ -y &= 0 \\ x+y+z+2t &= 0 \\ y-t &= 0 \end{cases}$$

Ondorioz $Ker(f) = \langle(1,0,-1,0)\rangle$ eta hau ez da azpiespazio orokortua. Badakigu $j = 2$ izango dela baian hala ere oinarri bat beharrezkoa dugu. Horregatik $Ker(f)^2$ kalkulatu behar da. Azpiespazio hau kalkulatzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} y &= 0 \\ y-2t &= 0 \\ -2y+t &= 0 \end{cases}$$

Ondorioz $V^*(0) = Ker(f)^2 = \langle(1,0,0,0),(0,0,1,0)\rangle$. Datu guzti hauekin lehenengo $J(0)$ lortuko dugu hurrengo taularen bitartez (gogoratu $d_i = dimKerf^i$ dela).

$$\begin{array}{lccl}
 & 0 & & \\
d_2 = 2 & & 1 & \text{bloke } 2 \times 2 \text{ ordenakoa} \\
 & 1 & & \\
d_1 = 1 & & 0 & \text{bloke } 1 \times 1 \text{ ordenakoa} \\
 & 1 & & \\
0 & & &
\end{array}$$

Orduan $J(0) = (\ J_2(1)\ ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bestalde oinarria lortzeko beste taula hau kalkulatuko dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_2 = 2$	$Ker(f)^2$	v
$d_1 = 1$	$Ker(f)$	$f(v)$

Oinarria osatzeko $v \in Ker(f)^2 - Ker(f)$ bektore bat behar da, adibidez: $v = (1, 0, 0, 0)$. Orduan $(f)(v) = (-1, 0, 1, 0)$ da eta $\beta_{V^*(0)} = \{(-1, 0, 1, 0),$

$, (1, 0, 0, 0)\}$ $V^*(0)$ azpiespazioaren oinarri bat da.

$V^*(-1)$ azpiespazioa:

Badakigu $V^*(-1) = Ker(f + id)^j$, $j \in \{1, 2, \}$ baterako non $\dim V^*(-1) = 2$ den. Horregatik $Ker(f + id)$ kalkulatuko dugu. Hemen hurrengo sistema ebatzi behar da:

$$\begin{cases} -y - z - t & = & 0 \\ x + y + 2z + 2t & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

Ondorioz $Ker(f + id) = \langle (0, 0, 1 - 1) \rangle$ eta hau ez da guk behar dugun azpiespazio orkortuak. Aukera bakarra orduan $j = 2$ izatea da baina hala ere orokortua kalkulatu behar da. Kasu honetan, hurrengo sistema ebatzi behar da:

$$\begin{cases} -x - 2y - 2z - 2t & = & 0 \\ 2x + 3y + 3z + 3t & = & 0 \end{cases}$$

Ondorioz $V^*(-1) = Ker(f + id)^2 = \langle (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle$.

Lortutako azpiespazioen dimentsioekin $J(1)$ lortzeko hurrengo taula lortu behar da:

0

$d_2 = 2$ $\quad 1 \quad$ bloke 2×2 ordenakoa

1

$d_1 = 1$ $\quad 0 \quad$ bloke 1×1 ordenakoa

1

0

Orduan $J(-1) = (\ J_2(-1)\ ) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Bestalde oinarria lortzeko lortutako azpiespazioak erabiliko ditugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_2 = 2$	$Ker(f+id)^2$	w
$d_1 = 1$	$Ker(f+id)$	$(f+id)(w)$

Oinarria guztiz osatzeko $w \in Ker(f+id)^2 - Ker(f+id)$ behar da. Adibidez: $w = (0,-1,1,0)$ eta beraz $(f+id)(w) = (0,0,-1,-1)$ da. Orduan $\beta_{V^*(-1)} = \{(0,0,-1,-1),(0,-1,1,0)\}$ $V^*(-1)$ azpespazioaren oinarri bat da.

Datu guztiak bilduta $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrize alderanzgarria badugu orduan $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Jordanen matrizea da.

2.- $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ antzekoak al dira? Horrela bada, lor ezazu aldaketa matrize bat.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

(i) A matrizearekin aurreko ariketako prozedura jarraituz ondokoa dugu. A matrizea $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen antzekoa da eta A matrizetik J matrizera pasatzeko $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ behar da.

(ii) Era berean B matrizearekin. B matrizea $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen antzekoa da eta aldaketa matrizea $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ da.

Orduan $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$ betetzen da. Beraz $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B$ da eta orduan aldaketa matrize bat $P = P_1P_2^{-1}$ da.

PROBLEMAK

1.- Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Eman A matrizearen, $a \in \mathbb{R}$-ren arabera, Jordanen forma eta aldaketa matrize bat.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Erraz kalkulatzen da polinomio karakteristikoa: $\chi_A(x) = (x-2)(x-1)^2$. Beraz $J = \begin{pmatrix} J(2) & 0 \\ 0 & J(1) \end{pmatrix}$ eta $P = M_\beta^{\beta_k}$ non $\beta = \beta_{V^*(2)} \cup \beta_{V^*(1)}$. J eta P lortzeko beharrezkoa dira azpiespazio orokortuak. Erosoago lan egiteko A matrizeari $f \in End(\mathbb{R}^3)$ elkartzen diogu hurrengo loturarekin: $M_{\beta_k}(f) = A$.

$V^*(2)$ azpiespazioa:

Argi eta garbi $V^*(2) = Ker(f - 2id) = \langle(1, 1, a+1)\rangle$. Beraz $J(2) = (2)$ eta $\beta_{V^*(2)} = \{(1, 1, a+1)\}$ da.

$V^*(1)$ azpespazioa:

Dakigunez $V^*(1) = Ker(f - id)^j$, $j \in \{1, 2\}$ baterako eta $dimV^*(1) = m(1) = 2$ da. Has gaitezen $Ker(f - id)$ azpiespazioarekin. Horretarako hurrengo sistema ebatzi behar da:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -y + z & = & 0 \\ ax & = & 0 \\ -y & = & 0 \\ ax - y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Bi kasu ditugu:

(i) $a = 0$

$V^*(1) = Ker(f - id) = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$

Datu hauekin lehenengo $J(1)$ lortuko dugu.

0

$d_1 = 2$ 2 bloke 1×1 ordenakoa

2

0

Orduan $J(1) = \begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestalde oinarria lortzeko ez dugu taula behar, zuzenean esan dezakegu $\beta_{V^*(0)} = \{(1,0,0), (0,1,1)\}$ dela.

Datu guztiak bilduta $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrize alderanzgarria badugu orduan $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Jordanen matrizea da.

(ii) $a \neq 0$

$Ker(f - id) = \langle (0,1,1) \rangle$ eta beraz $V^*(1) = Ker(f - id)^2$. Azpiespazio hau kalkulatzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -y + z & = & 0 \\ -ay + az & = & 0 \\ (-a-1)y + (a+1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ondorioz $V^*(1) = Ker(f - id)^2 = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$.

Dimentsioak erabiliz $J(1)$ lortuko dugu.

0

$d_2 = 2$ 1 bloke 2×2 ordenakoa

1

$d_1 = 1$ 0 bloke 1×1 ordenakoa

1

0

Orduan $J(1) = (\ J_2(1)\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bestalde oinarria lortzeko azpiespazioak behar ditugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_2 = 2$	$Ker(f - id)^2$	w
$d_1 = 1$	$Ker(f - id)$	$(f - id)(w)$

Oinarria osatzeko behar da $w \in Ker(f - id)^2 - Ker(f - id)$. Adibidez: $w = (1, 0, 0)$ eta orduan $(f - id)(w) = (0, a, a)$ da. Ondorioz $\beta_{V^*(-1)} = \{(0, a, a), (1, 0, 0)\}$ $V^*(-1)$ azpiespazioaren oinarri bat da. Datu guztiak bilduta $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ a+1 & a & 0 \end{pmatrix}$ matrize alderanzgarria badugu orduan $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Jordanen matrizea da.