ARIKETAK

1.- Kalkulatu, $\mathbb{R}^4$ espazioan, $f(x, y, z, t) = (3x + z, x + 2y + z, -x + z, -x + y + 2t)$ endomorfismoaren oinarrizko azpiespazio orokortuak:

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Lehenengo polinomio karakteristikoa kalkulatuko dugu: $\chi_f(x) = (x - 2)^4$. Beraz azpiespazio orokortu bakarra dugu: $V^*(2)$. Gainera, $V^*(2) = Ker(f - 2id)^j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ baterako eta $\dim V^*(2) = 4$ da. Bi datu hauekin j lortuko dugu.

$Ker(f - 2id)$ azpiespazioa:

Azpiespazio honen oinarri bat aurkitzeko beharrezkoa da hurrengo sistema ebaztea: $\left\{\begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ x + z & = & 0 \\ -x - z & = & 0 \\ -x + y & = & 0 \end{array}\right.$. Ondorioz $Ker(f - 2id) = \langle(1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$ eta hau ez da azpiespazio orokortua.

$Ker(f - 2id)^2$ azpiespazioa:

Ohartu $M_{\beta_k}((f - 2id)^2) = (0)$ dela eta beraz $Ker(f - 2id)^2 = \mathbb{R}^4$ dugu. Ondorioz, $V^*(2) = Ker(f - 2id)^2 = \mathbb{R}^4$ da.

2.- Izan bitez $V = \mathbb{C}^{10}$ eta $f \in End(V)$ balio propio bakarra duen endomorfismoa, λ. $d_i = Ker(f - \lambda 1_V)^i$ bada, posible al da $d_1 = 2, d_2 = 4, d_3 = 7, d_4 = 9$ eta $d_5 = 10$ izatea?

$\mathcal{EBAZPENA}$:

J Jordanen matrizea lortzeko, aurreko balioekin Jordanen matrizearen bloke-kopurua eta tamainua lortzeko hurrengo taula osatuko dugu:

$$\begin{array}{llll}
 & 0 & & \\
d_4 = 9 & & 2 & \text{bloke } 4 \times 4 \text{ ordenakoa} \\
 & 2 & & \\
d_3 = 7 & & 1 & \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\
 & 3 & & \\
d_2 = 4 & & -1 & \text{bloke } 2 \times 2 \text{ ordenakoa} \\
 & 2 & & \\
d_1 = 2 & & 0 & \text{bloke } 1 \times 1 \text{ ordenakoa} \\
 & 2 & & \\
0 & & &
\end{array}$$

Balio negatibo bat dugu beraz ezinezkoa datu horiekin J matrize bat lortzea.

PROBLEMAK

1.- Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^5)$ non $f(x, y, z, t, u) = (x + y, 2y - t, -y + 2z + 2t, y - z - t, y - z - 2t + u), \forall (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5$. Lor ezazu, posible bada, β $\mathbb{R}^5$ espazioaren oinarri bat non $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea den.

EBAZPENA

Polinomio karakteristikoa: $\chi_f(x) = (x - 1)^5$. Beraz existitzen $\beta = \beta_{V^*(1)}$ $\mathbb{R}^5$-en oinarri bat non $M_\beta(f) = J = (J(1))$ Jordanen matrizea den.

Azpiespazio orokortu bakarra dugu: $V^*(1) = Ker(f - id)^j$ eta $j \in \{1, ..., 5\}$ baterako non $\dim V^*(1) = 5$ den. j lortzeko nukleoak eta beraien dimentsioak lortu behar dira orokortua lortu arte.

$Ker(f - id)$ azpiespazioa:

Azpiespazio hau kalkulatzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ y - t & = & 0 \\ -y + z + 2t & = & 0 \\ y - z - 2t & = & 0 \\ y - z - 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

Ondorioz $Ker(f - id) = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$ eta hau ez da azpiespazio orokortua.

$Ker(f-id)^2$ azpiespazioa:

Azpiespazio hau kalkulatzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} y-t &= 0 \\ z+t &= 0 \\ -z-t &= 0 \\ z+t &= 0 \\ z+t &= 0 \end{cases}$$

Ondorioz $Ker(f-id) = \langle (1,0,0,0,0),(0,1,-1,1,0),(0,0,0,0,1)\rangle$ eta hau ere ez da azpiespazio orokortua.

$Ker(f-id)^3$ azpiespazioa:

Azpiespazio hau kalkulatzeko baldintza $z+t=0$ da. Ondorioz $Ker(f-id)^3 = \langle (1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,-1,0),(0,0,0,0,1)\rangle$. Hau da azpiespazio orokortua, gainera $V^*(1) = Ker(f-id)^4 = \mathbb{R}^5$ da.

Datu hauekin lehenengo $J(1)$ lortuko dugu. Hurrengo taularen bitartez matrize honen bloke-kopurua eta bloke bakoitzaren tamainua lortuko ditugu.

$$\begin{array}{llll}
 & 0 & & \\
d_4 = 5 & & 1 & \text{bloke } 4\times 4 \text{ ordenakoa} \\
 & 1 & & \\
d_3 = 4 & & 0 & \text{bloke } 3\times 3 \text{ ordenakoa} \\
 & 1 & & \\
d_2 = 3 & & 0 & \text{bloke } 2\times 2 \text{ ordenakoa} \\
 & 1 & & \\
d_1 = 2 & & 1 & \text{bloke } 1\times 1 \text{ ordenakoa} \\
 & 2 & & \\
0 & & &
\end{array}$$

Orduan $J(1) = \begin{pmatrix} J_4(1) & 0 \\ 0 & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bestalde oinarria lortzeko ondorengo beste taula hau erabiliko dugudugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_4 = 5$	$Ker(f+id)^4$	v_1
$d_3 = 4$	$Ker(f+id)^3$	$(f-id)(v_1)$
$d_2 = 3$	$Ker(f+id)^2$	$(f-id)^2(v_1)$
$d_1 = 2$	$Ker(f+id)$	$(f-id)^3(v_1), v_2$

$v_1 \in Ker(f-id)^4 - Ker(f-id)^3$, adibidez: $v_1 = (0,0,1,0,0)$. Orduan: $(f-id)(v_1) = (0,0,1,-1,-1)$, $(f-id)^2(v_1) = (0,1,-1,1,1)$ eta $(f-id)^3(v_1) = (1,0,0,0,0)$. Bestalde $v_2 \in Ker(f-id)$ eta aurrekoekiko linealki independentea izan behar du, adibidez: $v_2 = (0,0,0,0,1)$. Ondorioz $\beta_{V^*(1)} = \{(1,0,0,0,0),(0,1,-1,1,1),(0,0,1,-1,-1),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1)\}$.