ARIKETAK

1.- Froga ezazu $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - 2z = 0\}$ eta $W = \langle(-3, 1, 0),$ $(0, 0, 1)\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazioak direla eta aurkitu $U, W, U \cap W$ eta $U + W$ azpiespazioen oinarri bat eta dimentsioa.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

$\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^3$ denez orduan azpiespazioa dela frogatzeko hurrengo baldintzak konprobatu behar ditugu:

(i) $u_1 + u_2 \in U, \forall u_1, u_2 \in U$.

(ii) $ku \in U, \forall u \in U, \forall k \in K$.

(i) frogatuko dugu, (ii) era berean konprobatzen da. Izan bitez $u_1 = (x_1, y_1, z_1), u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ U-ko bi bektoreak beraz: $x_1 - y_1 - 2z_1 = 0$ eta $x_2 - y_2 - 2z_2 = 0$. Orduan $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ denez froga dezagun azpimultzoko propietatea betetzen duela. Horretarako ohartu:

$$x_1 + x_2 - y_1 - y_2 - 2z_1 - 2z_2 = x_1 - y_1 - 2z_1 + x_2 - y_2 - 2z_2 = 0 + 0$$

Bestalde, $W = \langle(-3, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$ denez $(-3, 1, 0)$ eta $(0, 0, 1)$ bektoreek sortutako azpiespazioa denez frogatuta dugu.

Kalkula dezagun orain U-ren oinarri bat. Ohartu $x - y - 2z = 0$ ekuaziotik $x = y + 2z$ lortzen dugula, beraz $U = \{(y + 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 1, 0), (2, 0, 1)\rangle$ da eta $\{(1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ gainera sistema askea da.

Zuzenean ikusten da $\beta_W = \{(-3, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ W-ren oinarri bat ere dela.

$U \cap W$-ren oinarri bat kalkulatzeko W-ren ekuazio inplizitua lortuko dugu: $x + 3y = 0$. Orduan $U \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0, x + 3y = 0\}$ da. Sistema homogeneoaren soluzioen multzoa $\{(-3y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ da. Beraz $U \cap W$-ren oinarri bat $\{(-3, 1, -2)\}$ multzoa da.

Bukatzeko $U + W$-ren oinarri bat lortuko dugu. Dakigunez hurrengo multzoa sistema sortzaile bat da:

$$\beta_U \cup \beta_W = \{(1, 1, 0), (2, 0, 1), (-3, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Dimentsioen formularen arabera $dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W) = 2+2-1 = 3$ izango da. Gainera $(1, 1, 0) = 2(2, 0, 1)+(-3, 1, 0)-2(0, 0, 1)$

denez $\{(2,0,1),(-3,1,0),(0,0,1)\}$ baturaren oinarri da.

2.- Aurkitu ezarritako baldintzak betetzen dituen f aplikazio lineal bakarra: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(1,1,1)=(2,1)$, $f(2,2,1)=(1,1)$, $f(2,1,-1)=(0,3)$.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Izan bedi $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\{(1,1,1),(2,2,1),(2,1,-1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria denez existitzen dira k_1,k_2,k_3 zenbaki errealak bakarrak non: $(x,y,z)=k_1(1,1,1)+k_2(2,2,1)+k_3(2,1,-1)$ den. Hemendik hurrengo sistema lortzen dugu:

$$\begin{cases} x &= k_1+2k_2+2k_3\\ y &= k_1+2k_2+k_3\\ z &= k_1+k_2-k_3\end{cases}$$

Sistemaren ebazpena eginez: $k_3=x-y$, $k_2=-2x+3y-z$ eta $k_1=3x-4y+2z$. Ondorioz $(x,y,z)=(3x-4y+2z)(1,1,1)+(-2x+3y-z)(2,2,1)+(x-y)(2,1,-1)$. Beraz $f(x,y,z)=f((3x-4y+2z)(1,1,1)+(-2x+3y-z)(2,2,1)+(x-y)(2,1,-1))$ da. f aplikazio lineala denez, $f(x,y,z)=(3x-4y+2z)f(1,1,1)+(-2x+3y-z)f(2,2,1)+(x-y)f(2,1,-1)$ da. $f(1,1,1)=(2,1), f(2,2,1)=(1,1), f(2,1,-1)=(0,3)$ ordezkapenak eginez hurrengoa lortzen dugu:

$$f(x,y,z)=(3x-4y+2z)(2,1)+(-2x+3y-z)(1,1)+(x-y)(0,3)=$$

$$=(4x-5y+3z,4x-4y+z).$$

3.-Aztertu $\begin{pmatrix}1&0&-4&4\\4&3&-4&8\\-4&-2&5&-8\\-4&-2&6&-9\end{pmatrix}$ matrizea $\mathbb{R}$ gainean diagonalgarriak denentz.Ahal denean, aurkitu forma diagonala,D, eta eman $P\in GL(n,\mathbb{R})$ non $P^{-1}AP=D$ den eta kalkulatu matrizearen $n$garren berredura edozein $n\in\mathbb{N}$.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Gogoratu A K gainean diagonalgarria dela baldin eta soilik baldin hurrengo baldintzak betetzen badira:

(i) $\chi_A(x)$ polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gainean daude.

(ii) λ balio propio bakoitzarentzat: $dimV(\lambda) = m(\lambda)$.

Ikus dezagun zer gertatzen den gure matrizearekin.

(i) A-ren polinomio karakteristikoa kalkulatzeko hurrengo determinantea kalkulatu behar dugu:

$$\chi_A(x) = det(xI_4 - A) = det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & x-3 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & x-5 & 8 \\ 4 & 2 & -6 & x+9 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko aldaketak erabiliz erraz konprobatzen da $\chi_A(x) = (x+1)^2(x-1)^2$ dela. Beraz lehengo baldintza betetzen da eta ganiera $m(-1) = m(1) = 2$ dira.

(ii) Kalkula dezagun $V(-1) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\}$.

Hemen hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x - 2z + 2t & = & 0 \\ x + y - z + 2t & = & 0 \\ -2x - y + 3z - 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

Ondorioz $V(-1) = \{(2z-2t, -z, z, t) \forall z, t \in \mathbb{R}\} = \langle(2, -1, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\rangle$ da eta $dimV(-1) = m(-1)$ da.

Ikus dezagun orain zer gertatzen den $V(1)$ azpiespazioarekin. Kasu honetan hurrengo sistema ebatzi beharko genuke:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -4z + 4t & = & 0 \\ 4x + 2y - 4z + 8t & = & 0 \\ -4x - 2y + 6z - 10t & = & 0 \end{array} \right.$$

Sistemaren soluzioa: $(x, -2x - 2z, z, z) \forall x, z \in \mathbb{R}$. Hemen ere $dimV(1) = m(1)$ betetzen da.

Orduan A matrizea diagonalgarria da eta aurreko kalkuluengatik badakigu

$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Kalkula dezagun $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ohartu $A = PDP^{-1}$ denez:

$$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

D matrize diagonala denez $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eta hortxe daukagu berretura kalkulatzeko modu erreza.

PROBLEMAK

1.- Izan bedi $X = \{x_1, ..., x_m\}$ multzo finitua. $i = 1, ..., m$ bakoitzarentzat, $f_i \in \mathcal{F}(X, K)$ aplikazioa honela definitzen dugu:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i \text{ bada ;} \\ 0, & x \neq x_i \text{ bada.} \end{cases}$$

Froga ezazu $\beta = \{f_1, ..., f_m\}$ $\mathcal{F}(X, K)$ K gaineko bektore-espazioaren oinarria dela. Beraz, $dim\mathcal{F}(X, K) = m = |X|$. Zeintzuk dira $f \in \mathcal{F}(X, K)$ elementu baten koordenatuak β oinarriarekiko?

$\mathcal{EBAZPENA}$:

$\{f_1, ..., f_m\}$ oinarria dela frogatzeko bi baldintza egiaztatu behar dira: sistema sortzailea eta sistema askea.

Froga dezagun lehenengo sistema askea dela. Horretarako hurrengo inplikazioa frogatu behar dugu:

$$a_1f_1 + ... + a_mf_m = 0 \Rightarrow a_1 = ... = a_m = 0_K$$

$a_1 f_1 + ... + a_m f_m = 0$ berdintzan $x = x_1, ..., x_m$ ordezkapenak egiten baditugu hurrengo sistema lortzen dugu:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_1 f_1(x_1) + ... + a_m f_m(x_1) & = & 0_K \\ a_1 f_1(x_2) + ... + a_m f_m(x_2) & = & 0_K \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 f_1(x_m) + ... + a_m f_m(x_m) & = & 0_K \end{array} \right.$$

Orain f_i-ren definizioagatik aurreko ekuazioak hauek dira: $a_1 = 0_K, ..., a_m = 0_K$.

Sistema sortzailea dela frogatzeko edozein $f \in \mathcal{F}(X, K)$ aurkitu behar ditut $b_1, ..., b_m \in K$ non:

$$f = b_1 f_1 + ... + b_m f_m$$

$x = x_1, ...x_m$ ordezkapenak eginez lortzen dugu: $b_1 = f(x_1)$,...,$b_m = f(x_m)$.

Beraz $dim\mathcal{F}(X, K) = m$ da.

2.- Izan bedi $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ non $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, 1, 1)$ eta $v_3 = (1, 1, 0)$ diren $\mathbb{R}^3$ espazioaren oinarria. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

(i) Kalkulatu $f(1, -1, 2)$ eta $f^2(0, 1, -1)$.

(ii) Lortu f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko.

(iii) Kalkulatu $f(x, y, z)$.

(iv) Aurkitu $Kerf$ eta Imf azpiespazioen oinarriak.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

(i) Teoriatik dakigu $f(1, -1, 2) = (v_1 v_2 v_3) M_\beta^\beta(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_\beta(1, -1, 2)$ den. Lor ditzagun x, y eta z-ren balioak, horretarako hurrengo sistema ebatzi behar da:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & = & x + y + z \\ -1 & = & y + z \\ 2 & = & -x + y \end{array} \right.$$

Beraz $x = 2, y = 4$ eta $z = -5$ dira. Orduan:

$$f(1,-1,2) = (v_1 v_2 v_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = (-20,-35,-10)$$

Bestalde $f^2(0,1,-1) = (v_1 v_2 v_3) M_\beta^\beta(f^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_\beta(0,1,-1)$ den. Dakigunez $M_\beta^\beta(f^2) = (M_\beta^\beta(f))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -1 \\ 7 & 14 & 30 \\ -11 & 2 & 31 \end{pmatrix}$ da eta gainera $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = M_\beta(0,1,-1)$ da.

(ii) f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoekiko lortzeko bi modu ditugu: bata definizioa erabiliz eta bestea elkartutako matrizeen arteko erlazioa erabiliz. Guk hemen bigarren aukera erabiliko dugu:

$$M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = M_\beta^{\beta_k} M_\beta^\beta(f) M_{\beta_k}^\beta$$

Erraz kalkulatzen da: $(x,y,z) = ((x-y)(x-y)+z-x+2y-z)_\beta$. Beraz:

$$M_{\beta_k}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ eta } M_\beta^{\beta_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan:

$$M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & -4 \\ -6 & 15 & -7 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(iii) Aurreko atalean $M_{\beta_k}^{\beta_k}(f)$ lortu dugunez erraz kalkulatzen dugu hurrengoa:

$$f(x,y,z) = (-2x+10y-4z, -6y+15y-7z, -x+5y-2z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(iv) $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\}$ da. Beraz $M_\beta^\beta(f)$ matrizea erabiliz hurrengo sistema homogeneoa ebatzi behar dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Emaitza: $c = 0$ eta $a = -2b$. Ohartu $(x, y, z) = (abc)_\beta = (-2bb0)_\beta$ dela. Beraz $(x, y, z) = (-2b)(1, 0, -1) + b(1, 1, 1) = (-b, b, 3b), \forall b \in \mathbb{R}$. Orduan $Kerf =< (-1, 1, 3) >$ da eta $\{(-1, 1, 3)\}$ oinarri bat izanik.

Kalkula dezagun Imf-ren oinarri bat. Dakigunez

$$Imf =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >=< (-2, -6, -1), (10, 15, 5), (-4, -7, -2) >$$

Bestalde, $dimImf = dim\mathbb{R}^3 - dimKerf = 2$ da. Beraz $\{(-2, -6, -1), (10, 15, 5)\}$ Imf-ren oinarri bat da.

3.- Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ izanik.

(i) Ze baldintzat bete behar dituzte a eta b matrizea diagonalgarria izan dadin?

(ii) Diagonalgarria denean, eman bere forma diagonala D eta aldaketa matrizea P. Lortu matrizea, D eta P-ren arteko erlazioa.

EBAZPENA :

(i) Dakigunez matrizea diagonalgarria izateko hurrengo bi baldintzak bete behar ditu:

a.- Polinomio karakteristikoaren erroak errealak dira.

b.- λ balio propio bakoitzarentzat: $dimV(\lambda) = m(\lambda)$.

Ikus dezagun zer gertatzen den gure matrizearekin.

a.- Argi eta garbi $\chi_A(x) = (x - 5)(x + 1)(x - b)$ da. Beraz lehenengo baldintza betetzen da a, b guztietarako.

b.- Hurrengo kasuak bereizten ditugu:

b1.- $b \neq 5, -1$ bada orduan badakigu matrizea diagonalgarria dela.

b2.- $b = 5$ bada orduan $m(5) = 2$ denez matrizea diagonalgarria izateko $dimV(5) = 2$ denentz ikusi behar dugu. $V(5)$ lortzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} -6y + az & = & 0 \\ 3x & = & 0 \end{cases}$$

Soluzioen multzoa: $\{(0, az/6, z) \quad | \quad z \in \mathbb{R}\}$

Argi eta garbi $dimV(5) = 1$ da beraz kasu honetan matrizea ez da diagonalgarria.

b3.- $b = -1$ bada $m(-1) = 2$ denez matrizea diagonalgarria da baldin eta soilik baldin $dimV(-1) = 2$ bada. $V(-1)$ azpiespazioaren dimentsioa lortzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} 6x & = & 0 \\ az & = & 0 \end{cases}$$

$a \neq 0$ bada orduan $V(-1) = \{(0, y, 0) \quad | \quad y \in \mathbb{R}\}$ da beraz matrizea ez da diagonalgarria. $a = 0$ kasuan $V(-1) = \langle(0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$ da eta kasu honetan matrizea diagonalgarria da.

(ii) Diagonalgarria direneko kasuak hauek dira: $b \neq 5, -1, \forall a$ eta $b = -1, a = 0$.

a.-$b \neq -1, 5$ bada hurrengo azpiespazio propien oinarriak behar ditugu: $V(-1)$,$V(5)$ eta $V(b)$.

$V(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 6x = 0, az = 0, (b + 1)z = 0\}$ orduan, $b \neq -1$ denez, $V(-1) =< (0, 1, 0 >$ da.

$V(5) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad -6y + az = 0, 3x + (b - 5)z = 0\}$ orduan $V(5) =< ((5 - b)/3, a/6, 1) >$ da.

$V(b) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 3x = 0, (-1 - b)y + az = 0\}$ orduan, $b \neq -1$ denez, $V(b) =< (0, a/(b + 1), 1 >$ da.

Beraz $P = \begin{pmatrix} 0 & (5 - b)/3 & 0 \\ 1 & a/6 & a/(b + 1) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ diagonala dugu.

b.- $b = -1$ eta $a = 0$ kasua. $V(-1)$ aurreko atalean kalkulatu dugu: $V(-1) = \langle(0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$ eta $V(5)$ kalkulatzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} -6y & = & 0 \\ 3x - 6z & = & 0 \end{cases}$$

Orduan $V(5) =< (2,0,1) >$ da eta $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ diagonala dugu.