# Eranskina 2

# Zatigarritasuna

**Definizioa 2.0.1.** *Izan bedi* $f(x) = \sum a_i x^i \in E[x]$ *polinomio ez-nulua.* $f$*-ren maila,* $deg(f)$ *denotatuko duguna, hurrengo balioa da:*

$$deg(f) = \max\{i \in IN \quad | \quad a_i \neq 0\}$$

*Ohartu* $deg(f) = 0$ *dela baldin eta soilik baldin* $f(x) = a_0$ *polinomio konstantea bada.*

**Oharra 2.0.2.** $f(x) = 0_E$ *deneko kasuan* $deg(f) = -\infty$ *dela esaten da eta suposatzen da hurrengo propietateak betetzen direla:* $-\infty < a$, $-\infty + b = b$ *eta* $-\infty \cdot d = -\infty$.

**Teorema 2.0.3.** *Izan bitez* $f(x) = \sum a_i x^i$ *eta* $g(x) = \sum b_i x^i$ $E$ *gaineko polinomioak. Orduan betetzen dira hurrengo baieztapenak:*

*(i)* $deg(f + g) \leq \max\{deg(f), deg(g)\}$ *eta maila desberdinekoak badira orduan berdintza betetzen da.*

*(ii)* $deg(f \cdot g) \leq deg(f) + deg(g)$.

**Oharra 2.0.4.** $E = IK$ *gorputza bada orduan erraz frogatzen da* $a_n, b_n \not 0_I K$ *izanik* $a_n b_m$ *ere* $0_I K$*-ren desberdina izango dela. Beraz,* $E = IK$ *gorputza bada orduan aurreko teoremako bigarren formulan* **berdintza** *betetzen da.*

**Definizioa 2.0.5.** *Izan bedi* $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ $E$ *gaineko polinomioa maila* $n$ *izanik. Orduan* $a_n \neq 0_E$ $f$*-ren* **koefiziente zuzendaria** *deitzen da. Koefiziente zuzendaria* $1_E$ *bada orduan* $f$ **polinomio monikoa** *dela esaten da.*

Hemendik aurrera $E = IK$ gorputza dela suposatuko dugu.

**Teorema 2.0.6** (Zatiketaren Algoritmoa IK[x]**.** *Eraztunean] Izan bitez* $f(x), g(x) \in IK[x]$, $g(x)$ *polinomio ez-nulua izanik. Orduan* $\exists! q(x), r(x) \in IK[x]$ *non:*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), deg(r) < deg(g) \text{ izanik }.$$

**Definizioa 2.0.7.** *Izan bitez* $f(x), g(x) \in IK[x]$. $g$*-k* $f$ **zatitzen** *duela esango dugu baldin eta existitzen bada* $q(x) \in IK[x]$ *polinomioa non* $f(x) = g(x)q(x)$ *betetzen den, hau da* $f(x)$ *eta* $g(x)$*-ren arteko zatiketaren hondarra* $0_{IK}$ *bada. Kasu honetan,* $f(x)$ $g(x)$*-ren multiploa dela esaten da ere.*

**Definizioa 2.0.8.** *Izan bitez* $f(x) \in IK[x]$ *eta* $\alpha \in IK$. $\alpha$ $f$*-ren* **erroa** *dela esaten da* $f(\alpha) = 0_{IK}$ *bada.*

**Adibideak 2.0.9.** $x^2 + 1$ *polinomioak ez du errorik* $\mathbb{Q}$*-n ezta* $\mathbb{R}$*-n ere. Baina* $\mathbb{C}$*-n bi erro dauzka:* $i, -i$.

**Teorema 2.0.10.** *Izan bitez* $f(x) \in IK[x]$ *eta* $\alpha \in IK$. *Orduan hurrengo baliokidetasuna betetzen da:*

$$\alpha \text{ } f\text{-ren erroa da } \Leftrightarrow (x - \alpha)/f(x)$$

**Teorema 2.0.11** (Aljebraren Oinarrizko Teorema)**.** *Izan bedi* $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ *polinomio ez-konstantea. Orduan* $f(x)$*-ren erro guztiak* $\mathbb{C}$*-n daude.*

**Teorema 2.0.12.** *Izan bedi* $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ *polinomioa. Orduan* $f(x)$*-ren erro arrazional,* $r/s$*, posibleak hauek dira:*

- *(i)* $(r, s) = 1$.
- *(ii)* $r/a_0$.
- *(iii)* $s/a_n$.