Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

5. Gaia 2

Oinarri Ortonormala eta Matrize Ortogonalak

Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra. Dakigunez existitzen dira oinarri ortonormalak beti eta oinarri ortonormal bat lortzeko aurreko gaiko metodoa daukagu. Kasu honetan, badago oinarri ortonormalak lortzeko beste modu bat.

Teorema 2.0.1 (Gram-Schmidten Ortogonalizazio Metodoa)**.** *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ E-ren oinarri bat. Orduan existitzen da β' E-ren oinarri ortogonal bat non $M_{\beta'}^{\beta}$ matrize triangeluarra den.*

Adibidea. Izan bedi $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y - z = 0\}$ azpiespazio. $(U, \cdot)$ espazio euklidearra da ohiko biderkadura eskalarrarekiko. Lor dezagun, aurreko teorema erabiliz, oinarri ortonormal bat. Horretarako, U-ren oinarri bat behar dugu: $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ adibidez. Orduan $\beta' = \{u_1, u_2\}$ oinarri ortogonaleko bektoreak lortzeko:

1.- $u_1 = (1, 0, 1)$ da.

2.- $u_2 = (0, 1, 1) + \lambda u_1$ modukoa da non $\lambda = -(0, 1, 1) \cdot u_1 / u_1 \cdot u_1$ den. Beraz, $\lambda = -1/2$ da. Orduan $u_2 = (-1/2, 1, 1/2)$ da.

Ondorioz $\beta' = \{(1, 0, 1), (-1/2, 1, 1/2)\}$ oinarri ortogonala da eta beraz $\beta'' = \{(1, 0, 1)/\sqrt{2}, (-1/2, 1, 1/2)/\sqrt{3/2}\}$ oinarri ortonormala da.

■

Definizioa 2.0.2. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea. A* **ortogonala** *dela esaten da baldin eta ${}^tAA = I_n$ bada. Hau da, A alderanzgarria bada eta $A^{-1} = A$ bada.*

Oharra 2.0.3. *A ortogonala bada $det(A) = 1$ edo $det(A) = -1$ da.*

Adibidea. 1.-I_n ortogonala da.

2.- Izan bedi $A \in M_2(\mathbb{R})$ matrize ortogonala orduan:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ edo } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 2.0.4. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea. Orduan baliokideak dira:*

- *(i) A ortogonala da.*
- *(ii) A matrizearen zutabeek $\mathbb{R}^n$-ren oinarri ortonormala osatzen dute ohiko biderkadura eskalarrarekiko.*
- *(iii)A matrizearen herrenkadek $\mathbb{R}^n$-ren oinarri ortonormala osatzen dute ohiko biderkadura eskalarrarekiko.*

Teorema 2.0.5. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ oinarri ortonormal bat. Beste oinarri bat $\beta' = \{u_1', ..., u_n'\}$ oinarri ortonormala da baldin eta soilik baldin $M_{\beta'}^{\beta}$ matrizea ortogonala bada.*