

5. Gaia 2

Oinarri Ortonormala eta Matrize Ortogonalak

1

Izan bedi (E, \cdot) espazio euklidearra. Dakigunez existitzen dira oinarri ortonormalak beti eta oinarri ortonormal bat lortzeko aurreko gaiko metodoa daukagu. Kasu honetan, badago oinarri ortonormalak lortzeko beste modu bat.

Teorema 2.0.1 (Gram-Schmidten Ortogonalizazio Metodoa). *Izan bitez (E, \cdot) espazio euklidearra eta $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ E -ren oinarri bat. Orduan existitzen da β' E -ren oinarri ortogonal bat non $M_{\beta'}$ matrize triangeluarra den.*

Adibidea. Izan bedi $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ azpiespazio. (U, \cdot) espazio euklidearra da ohiko biderkadura eskalarrarekiko. Lor dezagun, aurreko teorema erabiliz, oinarri ortonormal bat. Horretarako, U -ren oinarri bat behar dugu: $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ adibidez. Orduan $\beta' = \{u_1, u_2\}$ oinarri ortogonaleko bektoreak lortzeko:

1.- $u_1 = (1, 0, 1)$ da.

2.- $u_2 = (0, 1, 1) + \lambda u_1$ modukoa da non $\lambda = -(0, 1, 1) \cdot u_1 / u_1 \cdot u_1$ den. Beraz, $\lambda = -1/2$ da. Orduan $u_2 = (-1/2, 1, 1/2)$ da.

Ondorioz $\beta' = \{(1, 0, 1), (-1/2, 1, 1/2)\}$ oinarri ortogonal da eta beraz $\beta'' = \{(1, 0, 1)/\sqrt{2}, (-1/2, 1, 1/2)/\sqrt{3/2}\}$ oinarri ortonormal da. ■

¹OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

2

Definizioa 2.0.2. Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea. A **ortogonal** dela esaten da baldin eta ${}^tAA = I_n$ bada. Hau da, A alderanzgarria bada eta $A^{-1} = A$ bada.

Oharra 2.0.3. A ortogonal bada $\det(A) = 1$ edo $\det(A) = -1$ da.

Adibidea. 1.- I_n ortogonal da.

2.- Izan bedi $A \in M_2(\mathbb{R})$ matrize ortogonal orduan:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ edo } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 2.0.4. Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea. Orduan baliokideak dira:

- (i) A ortogonal da.
- (ii) A matrizearen zutabeek \mathbb{R}^n -ren oinarri ortonormala osatzen dute ohiko biderkadura eskalarrarekiko.
- (iii) A matrizearen herrenkadek \mathbb{R}^n -ren oinarri ortonormala osatzen dute ohiko biderkadura eskalarrarekiko.

Teorema 2.0.5. Izan bitez (E, \cdot) espazio euklidearra eta $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ oinarri ortonormal bat. Beste oinarri bat $\beta' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ oinarri ortonormala da baldin eta soilik baldin $M_{\beta'}^{\beta}$ matrizea ortogonal bada.