

5. Gaia 5

Isometria Linealak \mathbb{R}^2 eta \mathbb{R}^3 espazioetan

Teorema 5.0.1. *Izan bitez (\mathbb{R}^2, \cdot) espazio euklidearra eta $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometria lineala. Orduan existitzen da $\beta = \{v_1, v_2\}$ oinarri ortonormal bat non:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ edo } M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lehenengo kasuan f biraketa bat da, biraketaren angelua θ izanik eta bigarren kasuan f jatorritik pasatzen den zuzen batekiko erreflexioa da.

Frogapena. Dakigunez β oinarri ortonormala bada $M_\beta(f)$ matrize ortogonal da. Ikusi genuenez bi aukera besterik ez daude:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ edo } M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Azkenengo kasuan matrize simetrikoa da beraz diagonalgarria (balio propioak: $1, -1$) orduan badakigu existitzen dela oinarri ortonormal bat non matrize elkartua $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ den. ■

Azter ditzagun orain \mathbb{R}^3 gaineko isometriak. Lehenengo ohar batzuk behar ditugu:



Oharra 5.0.2. *Izan bedi (E, \cdot) espazio euklidearra*

1.- $f : E \rightarrow E$ aplikazio lineala bada eta $W \leq E$ azpiespazioa. W f -aldagaitza dela esaten da baldin eta $f(W) \leq W$ betetzen bada. Ohartu azpiespazio f -aldagaitzekin hurrengo endomorfismoa lortu ahal dugula:

$$\begin{aligned} f|_W &: W \rightarrow W \\ w &\mapsto f(w) \end{aligned}$$

murrizketa deitzen dena.

2.- W eta U E -ren azpiespazioak badira W eta U elkarrekin ortogonalak direla esaten da baldin eta:

$$u \cdot w = 0 \quad \forall u \in U, \forall w \in W.$$

Teorema 5.0.3. *Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometria orduan existitzen dira Z zuzen bat eta π plano bat, elkarrekin ortogonalak, non f zuzenaren gainean identitatea edo minus identitatea den eta plano gainean biraketa edo erreflexioa den.*

Ondorioa 5.0.4. *Izan bitez (\mathbb{R}^3, \cdot) espazio euklidearra eta $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometria lineala orduan hurrengo aukeretako bat ematen da:*

- 1.- f zuzen baten inguruko biraketa da.
- 2.- f plano batetiko erreflexioa da.
- 3.- f zuzen baten inguruko biraketa eta plano batetiko erreflexio baten konposaketa da.