5. Gaia 5

Isometria Linealak $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazioetan

[1]

Teorema 5.0.1. *Izan bitez $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria lineala. Orduan existitzen da $\beta = \{v_1, v_2\}$ oinarri ortonormal bat non:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ edo } M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lehenengo kasuan f biraketa bat da, biraketaren angelua θ izanik eta bigarren kasuan f jatorritik pasatzen den zuzen batekiko erreflexioa da.

Frogapena. Dakigunez β oinarri ortonormala bada $M_\beta(f)$ matrize ortogonala da. Ikusi genuenez bi aukera besterik ez daude:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ edo } M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Azkenengo kasuan matrize simetrikoa da beraz diagonalgarria (balio propioak: $1, -1$) orduan badakigu existitzen dela oinarri ortonormal bat non matrize elkartua $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ den.

■

Azter ditzagun orain $\mathbb{R}^3$ gaineko isometriak. Lehenengo ohar batzuk behar ditugu:

---

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Oharra 5.0.2. *Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra*

1.- $f : E \to E$ aplikazio lineala bada eta $W \leq E$ azpiespazioa. W f-aldagaitza dela esaten da baldin eta $f(W) \leq W$ betetzen bada. Ohartu azpiespazio f-aldagaitzekin hurrengo endomorfismoa lortu ahal dugula:

$$\begin{array}{rccc} f|_W & : & W & \to & W \\ & & w & \mapsto & f(w) \end{array}$$

murrizketa *deitzen dena.*

2.- W eta U E-ren azpiespazioak badira W eta U elkarrekin ortogonalak direla esaten da baldin eta:

$$u \cdot w = 0 \quad \forall u \in U, \forall w \in W.$$

Teorema 5.0.3. *Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria orduan existitzen dira Z zuzen bat eta π plano bat, elkarrekin ortogonalak, non f zuzenaren gainean identitatea edo minus identitatea den eta plano gainean biraketa edo erreflexioa den.*

Ondorioa 5.0.4. *Izan bitez $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria lineala orduan hurrengo aukeretako bat ematen da:*

1.- f zuzen baten inguruko biraketa da.

2.- f plano batetiko erreflexioa da.

3.- f zuzen baten inguruko biraketa eta plano batetiko erreflexio baten konposaketa da.

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia