5. Gaia 3

Isometria Linealak

Definizioa 3.0.1. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : E \to E$ aplikazio lineala. f* **isometria lineala** *dela esaten da baldin eta hurrengo baldintza betetzen badu:*

$$f(u) \cdot f(v) = u \cdot v, \forall u, v \in E.$$

Adibidea. Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra. Orduan $1_E, -1_E$ isometria linealak dira baina 0_E ez da isometria lineal bat. ■

Oharra 3.0.2. *Isometria lineal baten balio propio erreal posible bakarrak* 1 *edo/eta* -1 *dira.*

Teorema 3.0.3. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : E \to E$ aplikazio lineala. Orduan:*

$$f \textit{ isometria lineala } \Leftrightarrow ||f(u)|| = ||u||, \forall u \in E.$$

Adibidea. Izan bedi $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekiko. Definitzen dugu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x, y) = (x, -y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ den. Orduan $||f(x, y)|| = ||(x, -y)|| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = ||(x, y)$ denez, aurreko teoremarengatik, f isometria lineala dela esan daiteke. ■

Ondorioa 3.0.4. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : E \to E$ aplikazio lineala. Orduan f isometria lineala bada f bijektiboa da.*

Teorema 3.0.5. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra, $f : E \to E$ aplikazio lineala eta $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ oinarri ortonormala. Orduan:*

$$f \text{ isometria lineala } \Leftrightarrow \{f(u_1), ..., f(u_n)\} \text{ oinarri ortonormala}$$

Teorema 3.0.6. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra, $f : E \to E$ aplikazio lineala eta $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ oinarri ortonormala. Orduan:*

$$f \text{ isometria lineala } \Leftrightarrow M_\beta(f) \text{ ortogonala}$$

Adibidea. 1.- $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrararekin. Definitzen dugu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x, 1/\sqrt{2}y - 1/\sqrt{2}z, 1/\sqrt{2}y + 1/\sqrt{2}z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Orduan, β_k oinarri ortonormala denez eta $M_{\beta_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ matrize ortogonala f isometria lineala da.

2.- $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ espazio euklidearra non $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ oinarri ortonormala den. Orduan Definitzen dugu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x, y) = (x, -y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ den. $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ oinarri ortonormala eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ez da ortogonala beraz f ez da isometria lineala.

■