5. Gaia 4

Endomorfismo Autoadjuntuak

Definizioa 4.0.1. *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra eta $f: E \to E$ aplikazio lineala. f* **autoadjuntua** *dela esaten da baldin eta hurrengo baldintza betetzen badu:*

$$u \cdot f(v) = f(u) \cdot v, \forall u, v \in E.$$

Adibidea. Izan bedi $(E,\cdot)$ espazio euklidearra. Orduan $1_E, -1_E$ eta 0_E aplikazio linealak autoadjuntuak dira beti. ■

Teorema 4.0.2. *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra, $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ oinarri ortonormala eta $f: E \to E$ azplikazio lineala. Orduan:*

$$f \text{ autoadjuntua } \Leftrightarrow M_\beta(f) \text{ simetrikoa}$$

Adibidea. Izan bedi $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrararekin.

1.- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x,y) = (2x+y, x+2y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ den autoadjuntua da $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ simetrikoa delako.

2.- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x,y) = (x,-y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ den autoadjuntua da $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ simetrikoa delako.

3.- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x,y) = (x-y, x+y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ den ez da autoadjuntua $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ez baita simetrikoa.

■

Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : E \to E$ aplikazio lineala. Demagun existitzen dela f-ren bektore propioekin osatutako oinarri ortonormala, β. Orduan $M_\beta(f) = D$ diagonala da beraz simetrikoa da eta, aurreko teorema erabiliza, f autoadjuntua dela esan daiteke. Gaiaren azken helburua beste inplikazioa frogatzea izango da. Horretarako emaitza batzuk behar ditugu.

Oharra 4.0.3. *Izan bedi $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ matrizea. Orduan A-ren konjokatua $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ matrizea adierazten du. Definizio honekin argi eta garbi $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ betetzen da.*

Lema 4.0.4. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa. Orduan A-ren balio propio guztiak errealak dira.*

Lema 4.0.5. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f \in End(E)$ autoadjuntua. Orduan $W \leq E$ azpiespazio ez-nulua eta f aldagaitza bada W-n beti dago f-ren bektore propioren bat.*

Lema 4.0.6. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f \in End(E)$ autoadjuntua. $W \leq E$ f-aldagaitza bada $W^\perp$ ere f-aldagaitza da.*

Lema 4.0.7. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f \in End(E)$ autoadjuntua. λ eta ν f-ren balio propio desberdinak badira $V(\lambda)$ eta $V(\nu)$ azpiespazioak ortogonalak dira. Hau da:*

$$u \cdot v = 0 \forall u \in V(\lambda), \forall v \in V(\nu).$$

Teorema 4.0.8 (Teorema Espektrala)**.** *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f \in End(\mathbb{R}^n)$ autoadjuntua. Orduan existitzen da β E-ren oinarri bat hurrengo propietateak betetzen dituena:*

- *(i) β f-ren bektore propioekin osatuta dago.*
- *(ii) β oinarri ortonormala da.*

Ondorioa 4.0.9. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrikoa. Orduan existitzen da P matrize ortogonala non:*

$$P^{-1}AP = D \text{ diagonala den}$$

Ondorioz matrize erralak eta simetrikoak diagonalgarriak dira.

Oharra 4.0.10. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrikoa. Orduan existitzen da P matrize ortogonala non:*

$$P^{-1}AP = D \text{ diagonala den}$$

P ortogonala denez $P^{-1} = {}^tP$ da, beraz, A eta D kongruenteak dira eta ondorioz sigantura berdina dute. Orduan $sig(A) = sig(D) =$ (balio propio positiboen kopurua, balio propio negatiboen kopurua).

Are gehiago, $F : V \times V$ forma bilineal eta simetrikoa bada, β V-ren oinarri bat izanik. Orduan $sig(F) = sig(M_\beta(f)) =$ (balio propio positiboen kopurua, balio propio negatiboen kopurua).