5. Gaia 1

Espazio Euklidearraren Definizioa eta Propietateak

Izan bedi E $\mathbb{R}$ gaineko espazio bektoriala.

Definizioa 1.0.1. *E gaineko* **biderketa eskalarra** $f : E \times E \to \mathbb{R}$ *aplikazio bat da non f forma bilineala, simetrikoa, ez-endakatua eta positiboki definitua den. Hau da, f-k hurrengo propietateak betetzen ditu:*

- *(i) f forma bilineala da, hau da: 1.-* $f(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha f(v_1, w) + \beta f(v_2, w), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, w \in E.$

  2.- $f(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha f(v, w_1) + \beta f(v, w_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w_1, w_2 \in E.$

- *(ii) f simetrikoa da, hau da:*

$$f(v, w) = f(w, v), \forall v, w \in E.$$

- *(iii) f ez-endakatua da, hau da, $E^{\perp} = \{0\}$ da edo:*

$$f(v, w) = 0, \forall w \in E \Rightarrow v = 0.$$

- *(iv) f positiboki definitua da, hau da:*

$$f(v, v) \geq 0, \forall v \in E.$$

Oharrak 1.0.2. *1.- E $\mathbb{C}$ espazio bektoriala izango balitz biderkadura eskalarraren definizioak ez luke zentzurik izango $f(v,v) \geq 0$ ez bait dago definitua zenbaki konplexuen kasuan.*

2.- Izan bedi E $\mathbb{R}$ espazio bektoriala eta f biderkadura eskalarra. Orduan, hemendik aurrera f-ren ordez $\cdot$ notazioa erabiliko dugu eta, beraz, $f(v,w)$ idatzi ordez $v \cdot w$ idatziko dugu. Notazio honekin aurreko propietateak honela gelditzen dira:

- *(i) 1.-* $(\alpha v_1 + \beta v_2) \cdot w = \alpha v_1 \cdot w + \beta v_2 \cdot w, \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, w \in E.$
  2.- $v \cdot (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha v \cdot w_1 + \beta v \cdot w_2, \forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w_1, w_2 \in E.$
- *(ii)* $v \cdot w = w \cdot v, \forall v, w \in E.$
- *(iii)* $v \cdot w = 0, \forall w \in E \Rightarrow v = 0.$
- *(iv)* $v \cdot v \geq 0, \forall v \in E.$

Adibidea. 1.-Izan bedi $\mathbb{R}^n$ hurrengo formarekin:

$$(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Orduan biderkadura eskalarra da eta **ohiko biderkadura eskalarra** deitzen da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non $\beta = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortonormala den. Orduan f $\mathbb{R}^3$ gaineko beste biderkadura eskalarra da.

3.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan f ez da biderkadura eskalarra ez bait da positiboki definitua. ■

Definizioa 1.0.3. *Izan bitez E $\mathbb{R}$ gaineko espazio bektoriala eta $\cdot$ E gaineko biderkadura eskalarra. Orduan $(E, \cdot)$ bikote* **espazio euklidearra** *deitzen da.*

Adibidea. 1.- $\mathbb{R}^n$ ohiko biderkadura eskalarrarekin espazio euklidearra da. Bektoreak bidertzeko modua:

$$(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2.- $\mathbb{R}^3$ aurreko adibidean definitutako biderkadura eskalarrarekin ere espazio euklidearra da. Bektorak bidertzeko modua:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + x_3y_3,$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

■

Oharra 1.0.4. *Konparatuko ditugu:* $(R^n, \cdot)$ *espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekin eta* $(E, \cdot)$ *espazio euklidear orokorra.*

1.- $\mathbb{R}^n$ *kasuan,* β_k *oinarri ortonormala da. E kasuan, badakigu existitzen direla oinarri ortonormalak,* $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ *oinarrietako bat izanik.*

2.- $\mathbb{R}^n$ *kasuan, betkoreak bidertzeko erregela:* $(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ *da. E kasuan,* $v, w \in E$ *badira* $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$ *eta* $w = y_1v_1 + ... + y_nv_n$ *izanik orduan bektoreak bidertzeko erregela:* $v \cdot w = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ *da.*

3.- $\mathbb{R}^n$ *kasuan, bektore isotropo bakarra* $(0, ..., 0)$ *da. E, kasuan bektore isotropo bakarra* 0 *bektorea da.*

Definizioa 1.0.5. *Izan bedi* $(E, \cdot)$ *espazio euklidearra.* $u \in E$ *bada u-ren* **norma***, denotatuko dugu* $||u||$*, hurrengo zenbakia da:*

$$+\sqrt{u \cdot u}$$

Adibidea. 1.-Izan bedi $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekin. Orduan:

$$||(x_1, ..., x_n)|| = x_1^2 + ... + x_n^2, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$n = 2$ kasuan, u-ren normak u bektorearen modulua adierazten du.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortonormala den. Orduan:

$$||(x_1, x_2, x_3)|| = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

■

Teorema 1.0.6. *Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra. Orduan:*

1.- $||u|| \geq 0, \forall u \in E$ *eta* $||u|| = 0$ *da baldin eta soilik baldin* $u = 0$ *bada.*

2.- $||\lambda u|| = |\lambda| ||u||, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E.$

3.- $u \neq 0$ *bada orduan* $\frac{u}{||u||}$ *bektore unitarioa da, hau da, bere norma* 1 *da.*

Teorema 1.0.7 (Cauchy-Schwarzen desberdintza)**.** *Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra. Orduan:*

$$|u \cdot v| \leq ||u|| ||v||, \forall u, v \in E$$

Ondorioa 1.0.8 (Minkowskyren Desberdintza)**.** *Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra. Orduan:*

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in E.$$

Oharra 1.0.9. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $W \leq E$ azpiespazioa. Orduan:*

$$E = W \oplus W^{\perp}$$