

5. Gaia 1

Espazio Euklidearraren Definizioa eta Propietateak

1

Izan bedi E \mathbb{R} gaineko espazio bektoriala.

Definizioa 1.0.1. E gaineko biderketa eskalarra $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ aplikazio bat da non f forma bilineala, simetrikoa, ez-endakaturia eta positiboki definitua den. Hau da, f -k hurrengo propietateak betetzen ditu:

- (i) f forma bilineala da, hau da: 1.- $f(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha f(v_1, w) + \beta f(v_2, w), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, w \in E$.
2.- $f(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha f(v, w_1) + \beta f(v, w_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w_1, w_2 \in E$.

- (ii) f simetrikoa da, hau da:

$$f(v, w) = f(w, v), \forall v, w \in E.$$

- (iii) f ez-endakaturia da, hau da, $E^\perp = \{0\}$ da edo:

$$f(v, w) = 0, \forall w \in E \Rightarrow v = 0.$$

- (iv) f positiboki definitua da, hau da:

$$f(v, v) \geq 0, \forall v \in E.$$

¹OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

2

Oharrak 1.0.2. 1.- $E \subset \mathbb{C}$ espazio bektoriala izango balitz biderkadura eskalarren definizioak ez luke zentzurik izango $f(v, v) \geq 0$ ez bait dago definitua zenbaki konplexuen kasuan.

2.- Izan bedi $E \subset \mathbb{R}$ espazio bektoriala eta f biderkadura eskalarra. Orduan, hemendik aurrera f -ren orde \cdot notazioa erabiliko dugu eta, beraz, $f(v, w)$ idatzi orde $v \cdot w$ idatziko dugu. Notazio honekin aurreko propietateak honela gelditzen dira:

- (i) 1.- $(\alpha v_1 + \beta v_2) \cdot w = \alpha v_1 \cdot w + \beta v_2 \cdot w, \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, w \in E$.
2.- $v \cdot (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha v \cdot w_1 + \beta v \cdot w_2, \forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w_1, w_2 \in E$.
- (ii) $v \cdot w = w \cdot v, \forall v, w \in E$.
- (iii) $v \cdot w = 0, \forall w \in E \Rightarrow v = 0$.
- (iv) $v \cdot v \geq 0, \forall v \in E$.

Adibidea. 1.-Izan bedi \mathbb{R}^n hurrengo formarekin:

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Orduan biderkadura eskalarra da eta **ohiko biderkadura eskalarra** deitzen da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ \mathbb{R}^3 -ren oinarri ortonormala den. Orduan f \mathbb{R}^3 gaineko beste biderkadura eskalarra da.

3.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan f ez da biderkadura eskalarra ez bait da positiboki definitua. ■

Definizioa 1.0.3. Izan bitez $E \subset \mathbb{R}$ gaineko espazio bektoriala eta \cdot E gaineko biderkadura eskalarra. Orduan (E, \cdot) bikote **espazio euklearra** deitzen da.

²OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

3

Adibidea. 1.- \mathbb{R}^n ohiko biderkadura eskalarrarekin espazio euklidearra da. Bektoreak bidertzeko modua:

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2.- \mathbb{R}^3 aurreko adibidean definitutako biderkadura eskalarrarekin ere espazio euklidearra da. Bektorak bidertzeko modua:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + x_3 y_3,$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

■

Oharra 1.0.4. Konparatuko ditugu: (\mathbb{R}^n, \cdot) espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekin eta (E, \cdot) espazio euklidear orokorra.

1.- \mathbb{R}^n kasuan, β_k oinarri ortonormala da. E kasuan, badakigu existitzen direla oinarri ortonormalak, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ oinarrietako bat izanik.

2.- \mathbb{R}^n kasuan, betkoreak bidertzeko erregela: $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ da. E kasuan, $v, w \in E$ badira $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ eta $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ izanik orduan bektoreak bidertzeko erregela: $v \cdot w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ da.

3.- \mathbb{R}^n kasuan, bektore isotropo bakarra $(0, \dots, 0)$ da. E , kasuan bektore isotropo bakarra 0 bektorea da.

Definizioa 1.0.5. Izan bedi (E, \cdot) espazio euklidearra. $u \in E$ bada u -ren **norma**, denotatuko dugu $\|u\|$, hurrengo zenbakia da:

$$+\sqrt{u \cdot u}$$

Adibidea. 1.-Izan bedi (\mathbb{R}^n, \cdot) espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekin. Orduan:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$n = 2$ kasuan, u -ren normak u bektorearen modulua adierazten du.

³OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

4

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ \mathbb{R}^3 -ren oinarri ortonormala den. Orduan:

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

■

Teorema 1.0.6. *Izan bedi (E, \cdot) espazio euklidearra. Orduan:*

- 1.- $\|u\| \geq 0, \forall u \in E$ eta $\|u\| = 0$ da baldin eta soilik baldin $u = 0$ bada.
- 2.- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$.
- 3.- $u \neq 0$ bada orduan $\frac{u}{\|u\|}$ bektore unitarioa da, hau da, bere norma 1 da.

Teorema 1.0.7 (Cauchy-Schwarzen desberdintza). *Izan bedi (E, \cdot) espazio euklidearra. Orduan:*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in E$$

Ondorioa 1.0.8 (Minkowskyren Desberdintza). *Izan bedi (E, \cdot) espazio euklidearra. Orduan:*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in E.$$

Oharra 1.0.9. *Izan bitez (E, \cdot) espazio euklidearra eta $W \leq E$ azpiespazioa. Orduan:*

$$E = W \oplus W^\perp$$

⁴OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia