5. Gaia 0

Espazio Euklidearrak

0.1 Espazio Euklidearraren Definizioa eta Propietateak

Izan bedi E $\mathbb{R}$ gaineko espazio bektoriala.

Definizioa 0.1.1. *E gaineko* **biderketa eskalarra** *$f : E \times E \to \mathbb{R}$ aplikazio bat da non f forma bilineala, simetrikoa, ez-endakatua eta positiboki definitua den. Hau da, f-k hurrengo propietateak betetzen ditu:*

- *(i) f forma bilineala da, hau da: 1.-* $f(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha f(v_1, w) + \beta f(v_2, w), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, w \in E.$

  2.- $f(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha f(v, w_1) + \beta f(v, w_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w_1, w_2 \in E.$

- *(ii) f simetrikoa da, hau da:*

$$f(v, w) = f(w, v), \forall v, w \in E.$$

- *(iii) f ez-endakatua da, hau da, $E^{\perp} = \{0\}$ da edo:*

$$f(v, w) = 0, \forall w \in E \Rightarrow v = 0.$$

- *(iv) f positiboki definitua da, hau da:*

$$f(v, v) \geq 0, \forall v \in E.$$

OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

Oharrak 0.1.2. *1.- E $\mathbb{C}$ espazio bektoriala izango balitz biderkadura eskalarraren definizioak ez luke zentzurik izango $f(v,v) \geq 0$ ez bait dago definitua zenbaki konplexuen kasuan.*

2.- Izan bedi E $\mathbb{R}$ espazio bektoriala eta f biderkadura eskalarra. Orduan, hemendik aurrera f-ren ordez $\cdot$ notazioa erabiliko dugu eta, beraz, $f(v,w)$ idatzi ordez $v \cdot w$ idatziko dugu. Notazio honekin aurreko propietateak honela gelditzen dira:

- *(i) 1.-* $(\alpha v_1 + \beta v_2) \cdot w = \alpha v_1 \cdot w + \beta v_2 \cdot w, \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, w \in E.$
  2.- $v \cdot (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha v \cdot w_1 + \beta v \cdot w_2, \forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w_1, w_2 \in E.$
- *(ii)* $v \cdot w = w \cdot v, \forall v, w \in E.$
- *(iii)* $v \cdot w = 0, \forall w \in E \Rightarrow v = 0.$
- *(iv)* $v \cdot v \geq 0, \forall v \in E.$

Adibidea. 1.-Izan bedi $\mathbb{R}^n$ hurrengo formarekin:

$$(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Orduan biderkadura eskalarra da eta **ohiko biderkadura eskalarra** deitzen da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non $\beta = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortonormala den. Orduan f $\mathbb{R}^3$ gaineko beste biderkadura eskalarra da.

3.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan f ez da biderkadura eskalarra ez bait da positiboki definitua. ■

Definizioa 0.1.3. *Izan bitez E $\mathbb{R}$ gaineko espazio bektoriala eta $\cdot$ E gaineko biderkadura eskalarra. Orduan $(E, \cdot)$ bikote* **espazio euklidearra** *deitzen da.*

BY NC ND

Adibidea. 1.- $\mathbb{R}^n$ ohiko biderkadura eskalarrarekin espazio euklidearra da. Bektoreak bidertzeko modua:

$$(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2.- $\mathbb{R}^3$ aurreko adibidean definitutako biderkadura eskalarrarekin ere espazio euklidearra da. Bektorak bidertzeko modua:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + x_3y_3,$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

■

Oharra 0.1.4. *Konparatuko ditugu:* $(R^n, \cdot)$ *espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekin eta* $(E, \cdot)$ *espazio euklidear orokorra.*

1.- $\mathbb{R}^n$ *kasuan,* β_k *oinarri ortonormala da.* E *kasuan, badakigu existitzen direla oinarri ortonormalak,* $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ *oinarrietako bat izanik.*

2.- $\mathbb{R}^n$ *kasuan, betkoreak bidertzeko erregela:* $(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ *da.* E *kasuan,* $v, w \in E$ *badira* $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$ *eta* $w = y_1v_1 + ... + y_nv_n$ *izanik orduan bektoreak bidertzeko erregela:* $v \cdot w = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ *da.*

3.- $\mathbb{R}^n$ *kasuan, bektore isotropo bakarra* $(0, ..., 0)$ *da.* E*, kasuan bektore isotropo bakarra* 0 *bektorea da.*

Definizioa 0.1.5. *Izan bedi* $(E, \cdot)$ *espazio euklidearra.* $u \in E$ *bada* u*-ren* **norma***, denotatuko dugu* $||u||$*, hurrengo zenbakia da:*

$$+\sqrt{u \cdot u}$$

Adibidea. 1.-Izan bedi $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekin. Orduan:

$$||(x_1, ..., x_n)|| = x_1^2 + ... + x_n^2, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$n = 2$ kasuan, u-ren normak u bektorearen modulua adierazten du.

BY NC ND

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortonormala den. Orduan:

$$||(x_1,x_2,x_3)|| = (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2, \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

■

Teorema 0.1.6. *Izan bedi $(E,\cdot)$ espazio euklidearra. Orduan:*

1.- $||u|| \geq 0, \forall u \in E$ *eta* $||u|| = 0$ *da baldin eta soilik baldin* $u = 0$ *bada.*

2.- $||\lambda u|| = |\lambda|||u||, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E.$

3.- $u \neq 0$ *bada orduan* $\frac{u}{||u||}$ *bektore unitarioa da, hau da, bere norma* 1 *da.*

Teorema 0.1.7 (Cauchy-Schwarzen desberdintza)**.** *Izan bedi $(E,\cdot)$ espazio euklidearra. Orduan:*

$$|u \cdot v| \leq ||u||||v||, \forall u, v \in E$$

Ondorioa 0.1.8 (Minkowskyren Desberdintza)**.** *Izan bedi $(E,\cdot)$ espazio euklidearra. Orduan:*

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in E.$$

Oharra 0.1.9. *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra eta $W \leq E$ azpiespazioa. Orduan:*

$$E = W \oplus W^{\perp}$$

0.2 Oinarri Ortonormala eta Matrize Ortogonalak

Izan bedi $(E,\cdot)$ espazio euklidearra. Dakigunez existitzen dira oinarri ortonormalak beti eta oinarri ortonormal bat lortzeko aurreko gaiko metodoa daukagu. Kasu honetan, badago oinarri ortonormalak lortzeko beste modu bat.

Teorema 0.2.1 (Gram-Schmidten Ortogonalizazio Metodoa)**.** *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra eta $\beta = \{v_1,...,v_n\}$ E-ren oinarri bat. Orduan existitzen da β' E-ren oinarri ortogonal bat non $M^{\beta}_{\beta'}$ matrize triangeluarra den.*

BY NC ND

Adibidea. Izan bedi $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y - z = 0\}$ azpiespazio. $(U, \cdot)$ espazio euklidearra da ohiko biderkadura eskalarrarekiko. Lor dezagun, aurreko teorema erabiliz, oinarri ortonormal bat. Horretarako, U-ren oinarri bat behar dugu: $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ adibidez. Orduan $\beta' = \{u_1, u_2\}$ oinarri ortogonaleko bektoreak lortzeko:

1.- $u_1 = (1, 0, 1)$ da.

2.- $u_2 = (0, 1, 1) + \lambda u_1$ modukoa da non $\lambda = -(0, 1, 1) \cdot u_1 / u_1 \cdot u_1$ den. Beraz, $\lambda = -1/2$ da. Orduan $u_2 = (-1/2, 1, 1/2)$ da.

Ondorioz $\beta' = \{(1, 0, 1), (-1/2, 1, 1/2)\}$ oinarri ortogonala da eta beraz $\beta'' = \{(1, 0, 1)/\sqrt{2}, (-1/2, 1, 1/2)/\sqrt{3/2}\}$ oinarri ortonormala da.

■

Definizioa 0.2.2. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea. A* **ortogonala** *dela esaten da baldin eta ${}^tAA = I_n$ bada. Hau da, A alderanzgarria bada eta $A^{-1} = A$ bada.*

Oharra 0.2.3. *A ortogonala bada $det(A) = 1$ edo $det(A) = -1$ da.*

Adibidea. 1.-I_n ortogonala da.

2.- Izan bedi $A \in M_2(\mathbb{R})$ matrize ortogonala orduan:

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ edo $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

■

Teorema 0.2.4. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea. Orduan baliokideak dira:*

- *(i) A ortogonala da.*
- *(ii) A matrizearen zutabeek $\mathbb{R}^n$-ren oinarri ortonormala osatzen dute ohiko biderkadura eskalarrarekiko.*
- *(iii)A matrizearen herrenkadek $\mathbb{R}^n$-ren oinarri ortonormala osatzen dute ohiko biderkadura eskalarrarekiko.*

Teorema 0.2.5. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ oinarri ortonormal bat. Beste oinarri bat $\beta' = \{u_1', ..., u_n'\}$ oinarri ortonormala da baldin eta soilik baldin $M_{\beta'}^{\beta}$ matrizea ortogonala bada.*

BY NC ND

0.3 Isometria Linealak

Definizioa 0.3.1. *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra eta $f: E \to E$ aplikazio lineala.* f **isometria lineala** *dela esaten da baldin eta hurrengo baldintza betetzen badu:*

$$f(u)\cdot f(v) = u\cdot v, \forall u,v \in E.$$

Adibidea. Izan bedi $(E,\cdot)$ espazio euklidearra. Orduan $1_E, -1_E$ isometria linealak dira baina 0_E ez da isometria lineal bat. ■

Oharra 0.3.2. *Isometria lineal baten balio propio erreal posible bakarrak* 1 *edo/eta* -1 *dira.*

Teorema 0.3.3. *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra eta $f: E \to E$ aplikazio lineala. Orduan:*

$$f \text{ isometria lineala } \Leftrightarrow ||f(u)|| = ||u||, \forall u \in E.$$

Adibidea. Izan bedi $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekiko. Definitzen dugu $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x,y) = (x,-y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ den. Orduan $||f(x,y)|| = ||(x,-y)|| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = ||(x,y)$ denez, aurreko teoremarengatik, f isometria lineala dela esan daiteke. ■

Ondorioa 0.3.4. *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra eta $f: E \to E$ aplikazio lineala. Orduan f isometria lineala bada f bijektiboa da.*

Teorema 0.3.5. *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra, $f: E \to E$ aplikazio lineala eta $\beta = \{u_1,...,u_n\}$ oinarri ortonormala. Orduan:*

$$f \text{ isometria lineala } \Leftrightarrow \{f(u_1),...,f(u_n)\} \text{ oinarri ortonormala}$$

Teorema 0.3.6. *Izan bitez $(E,\cdot)$ espazio euklidearra, $f: E \to E$ aplikazio lineala eta $\beta = \{u_1,...,u_n\}$ oinarri ortonormala. Orduan:*

$$f \text{ isometria lineala } \Leftrightarrow M_\beta(f) \text{ ortogonala}$$

BY NC ND

Adibidea. 1.- $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrararekin. Definitzen dugu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x, 1/\sqrt{2}y - 1/\sqrt{2}z, 1/\sqrt{2}y + 1/\sqrt{2}z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Orduan, β_k oinarri ortonormala denez eta $M_{\beta_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ matrize ortogonala f isometria lineala da.

2.- $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ espazio euklidearra non $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ oinarri ortonormala den. Orduan Definitzen dugu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x, y) = (x, -y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ den. $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ oinarri ortonormala eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ez da ortogonala beraz f ez da isometria lineala.

■

0.4 Endomorfismo Autoadjuntuak

Definizioa 0.4.1. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : E \to E$ aplikazio lineala. f* **autoadjuntua** *dela esaten da baldin eta hurrengo baldintza betetzen badu:*

$$u \cdot f(v) = f(u) \cdot v, \forall u, v \in E.$$

Adibidea. Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra. Orduan $1_E, -1_E$ eta 0_E aplikazio linealak autoadjuntuak dira beti. ■

Teorema 0.4.2. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra, $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ oinarri ortonormala eta $f : E \to E$ azplikazio lineala. Orduan:*

$$f \text{ autoadjuntua } \Leftrightarrow M_\beta(f) \text{ simetrikoa}$$

Adibidea. Izan bedi $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrararekin.

1.- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x, y) = (2x+y, x+2y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ den autoadjuntua da $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ simetrikoa delako.

2.- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x, y) = (x, -y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ den autoadjuntua da $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ simetrikoa delako.

BY NC ND

3.- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x,y) = (x-y, x+y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ den ez da autoadjuntua $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ez baita simetrikoa.

■

Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : E \to E$ aplikazio lineala. Demagun existitzen dela f-ren bektore propioekin osatutako oinarri ortonormala, β. Orduan $M_\beta(f) = D$ diagonala da beraz simetrikoa da eta, aurreko teorema erabiliza, f autoadjuntua dela esan daiteke. Gaiaren azken helburua beste inplikazioa frogatzea izango da. Horretarako emaitza batzuk behar ditugu.

Oharra 0.4.3. *Izan bedi $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ matrizea. Orduan A-ren konjokatua $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ matrizea adierazten du. Definizio honekin argi eta garbi $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ betetzen da.*

Lema 0.4.4. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa. Orduan A-ren balio propio guztiak errealak dira.*

Lema 0.4.5. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f \in End(E)$ autoadjuntua. Orduan $W \leq E$ azpiespazio ez-nulua eta f aldagaitza bada W-n beti dago f-ren bektore propioren bat.*

Lema 0.4.6. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f \in End(E)$ autoadjuntua. $W \leq E$ f-aldagaitza bada $W^\perp$ ere f-aldagaitza da.*

Lema 0.4.7. *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f \in End(E)$ autoadjuntua. λ eta ν f-ren balio propio desberdinak badira $V(\lambda)$ eta $V(\nu)$ azpiespazioak ortogonalak dira. Hau da:*

$$u \cdot v = 0 \forall u \in V(\lambda), \forall v \in V(\nu).$$

Teorema 0.4.8 (Teorema Espektrala)**.** *Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f \in End(\mathbb{R}^n)$ autoadjuntua. Orduan existitzen da β E-ren oinarri bat hurrengo propietateak betetzen dituena:*

- *(i) β f-ren bektore propioekin osatuta dago.*
- *(ii) β oinarri ortonormala da.*

Ondorioa 0.4.9. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrikoa. Orduan existitzen da P matrize ortogonala non:*

$$P^{-1}AP = D \text{ diagonala den}$$

Ondorioz matrize erralak eta simetrikoak diagonalgarriak dira.

BY NC ND

Oharra 0.4.10. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrikoa. Orduan existitzen da P matrize ortogonala non:*

$$P^{-1}AP = D \text{ diagonala den}$$

P ortogonala denez $P^{-1} = {}^tP$ da, beraz, A eta D kongruenteak dira eta ondorioz sigantura berdina dute. Orduan $sig(A) = sig(D) =$ (balio propio positiboen kopurua, balio propio negatiboen kopurua).

Are gehiago, $F : V \times V$ forma bilineal eta simetrikoa bada, β V-ren oinarri bat izanik. Orduan $sig(F) = sig(M_\beta(f)) =$ (balio propio positiboen kopurua, balio propio negatiboen kopurua).

0.5 Isometria Linealak $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazioetan

Teorema 0.5.1. *Izan bitez $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria lineala. Orduan existitzen da $\beta = \{v_1, v_2\}$ oinarri ortonormal bat non:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ edo } M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lehenengo kasuan f biraketa bat da, biraketaren angelua θ izanik eta bigarren kasuan f jatorritik pasatzen den zuzen batekiko erreflexioa da.

Frogapena. Dakigunez β oinarri ortonormala bada $M_\beta(f)$ matrize ortogonala da. Ikusi genuenez bi aukera besterik ez daude:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ edo } M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Azkenengo kasuan matrize simetrikoa da beraz diagonalgarria (balio propioak: $1, -1$) orduan badakigu existitzen dela oinarri ortonormal bat non matrize elkartua $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ den.

■

Azter ditzagun orain $\mathbb{R}^3$ gaineko isometriak. Lehenengo ohar batzuk behar ditugu:

BY NC ND

Oharra 0.5.2. *Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio euklidearra*

1.- $f : E \to E$ aplikazio lineala bada eta $W \leq E$ azpiespazioa. W f-aldagaitza dela esaten da baldin eta $f(W) \leq W$ betetzen bada. Ohartu azpiespazio f-aldagaitzekin hurrengo endomorfismoa lortu ahal dugula:

$$\begin{array}{rccc} f|_W & : & W & \to & W \\ & & w & \mapsto & f(w) \end{array}$$

murrizketa *deitzen dena.*

2.- W eta U E-ren azpiespazioak badira W eta U elkarrekin ortogonalak direla esaten da baldin eta:

$$u \cdot w = 0 \quad \forall u \in U, \forall w \in W.$$

Teorema 0.5.3. *Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria orduan existitzen dira Z zuzen bat eta π plano bat, elkarrekin ortogonalak, non f zuzenaren gainean identitatea edo minus identitatea den eta plano gainean biraketa edo erreflexioa den.*

Ondorioa 0.5.4. *Izan bitez $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ espazio euklidearra eta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria lineala orduan hurrengo aukeretako bat ematen da:*

1.- f zuzen baten inguruko biraketa da.

2.- f plano batetiko erreflexioa da.

3.- f zuzen baten inguruko biraketa eta plano batetiko erreflexio baten konposaketa da.

cc BY NC ND