4. Gaia 5

Sylvesterren Inertzi-Legea

Hemendik aurrera $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa izango da. Hau da gorputza beti $\mathbb{R}$ izango da. Dakigunez existitzen da $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-re oinarri ortogonala f-rekiko. Oinarri honetan hurrengo egoera ematen dela suposa dezakegu, bestela oinarri bektoreak berrordenatu egingo genituzke:

$v_1, f(v_1, v_1) > 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{f(v_1,v_1)}}v_1$ bektorea.

$\vdots$

$v_r, f(v_r, v_r) > 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{f(v_r,v_r)}}v_r$ bektorea.

$v_{r+1}, f(v_{r+1}, v_{r+1}) < 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+1},v_{r+1})}}v_{r+1}$ bektorea.

$\vdots$

$v_{r+s}, f(v_{r+s}, v_{r+s}) < 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+s},v_{r+s})}}v_{r+s}$ bektorea.

$v_{r+s+1}, f(v_{r+s+1}, v_{r+s+1}) = 0$ eta definitzen dugu v_{r+s+1} bektorea.

$\vdots$

$v_n, f(v_n, v_n) = 0$ eta definitzen dugu v_n bektorea.

β V-ren oinarri ortogonala denez:

$$\beta' = \{\frac{1}{\sqrt{f(v_1, v_1)}}v_1, ..., \frac{1}{\sqrt{f(v_r, v_r)}}v_r, \frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+1}, v_{r+1})}}v_{r+1}, ..., \frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+s}, v_{r+s})}}v_{r+s},$$

$$, \ldots, v_{r+s+1}, \ldots, v_n\}$$

ere oinarri ortogonala da eta ganiera:

$$M_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 5.0.1. *Aurreko egoeran, $M_{\beta'}(f)$ matrizearen diagonaleko zero-kopurua f-ren nukleoaren dimentsioa da.*

Teorema 5.0.2 (Sylvesterren Inertzi-Legea)**.** *Izan bedi $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa. Demagun β eta β' V-ren bi oinarriak non:*

$$M_{\beta}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{eta}$$

$$M_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan 1 eta -1-en kopurua , (r,s), berdina da bi matrizeetan. (r,s) bikotea f-ren **signatura** *deitzen da eta denotatuko dugu $sig(f)$.*

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan $\beta = \{e_1, e_2, (-1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala da f-rekiko. Gainera $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ denez $sig(f) = (1,1)$ da.

■

Ondorioa 5.0.3. *Izan bitez A matrize simetrikoa. Demagun existitzen direla P_1 eta P_2 matrize alderanzgarriak non:*

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

eta

$$
{}^{t}PAP = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

Orduan 1 eta -1-en kopurua , (r, s), berdina da bi matrizeetan. (r, s) bikotea A-ren **signatura** *deitzen da eta denotatuko dugu $sig(A)$.*

Adibidea. Izan bedi $MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrize simetrikoa. Orduan $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ harturik:

$$
{}^{t}PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Beraz $sig(A) = (1, 1)$ da.

■

Teorema 5.0.4. *1.- Izan bitez $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa, eta $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa. Orduan:*

$$
Af - ri \textit{ elkartuta dago } \Leftrightarrow sig(f) = sig(A).
$$

2.- Izan bitez $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoak. Orduan:

$$
A \textit{ eta } B \textit{ kongruenteak dira } \Leftrightarrow sig(A) = sig(B).
$$