# 4. Gaia 5

# Sylvesterren Inertzi-Legea

[1]

Hemendik aurrera $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa izango da. Hau da gorputza beti $\mathbb{R}$ izango da. Dakigunez existitzen da $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ $V$-re oinarri ortogonala $f$-rekiko. Oinarri honetan hurrengo egoera ematen dela suposa dezakegu, bestela oinarri bektoreak berrordenatu egingo genituzke:

$v_1, f(v_1, v_1) > 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{f(v_1,v_1)}}v_1$ bektorea.

$\vdots$

$v_r, f(v_r, v_r) > 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{f(v_r,v_r)}}v_r$ bektorea.

$v_{r+1}, f(v_{r+1}, v_{r+1}) < 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+1},v_{r+1})}}v_{r+1}$ bektorea.

$\vdots$

$v_{r+s}, f(v_{r+s}, v_{r+s}) < 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+s},v_{r+s})}}v_{r+s}$ bektorea.

$v_{r+s+1}, f(v_{r+s+1}, v_{r+s+1}) = 0$ eta definitzen dugu $v_{r+s+1}$ bektorea.

$\vdots$

$v_n, f(v_n, v_n) = 0$ eta definitzen dugu $v_n$ bektorea.

$\beta$ $V$-ren oinarri ortogonala denez:

$$\beta' = \{\frac{1}{\sqrt{f(v_1, v_1)}}v_1, ..., \frac{1}{\sqrt{f(v_r, v_r)}}v_r, \frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+1}, v_{r+1})}}v_{r+1}, ..., \frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+s}, v_{r+s})}}v_{r+s},$$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

2

$$, ..., v_{r+s+1}, ..., v_n\}$$

ere oinarri ortogonala da eta ganiera:

$$M_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Teorema 5.0.1.** *Aurreko egoeran, $M_{\beta'}(f)$ matrizearen diagonaleko zero-kopurua $f$-ren nukleoaren dimentsioa da.*

**Teorema 5.0.2** (Sylvesterren Inertzi-Legea)**.** *Izan bedi $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa. Demagun $\beta$ eta $\beta'$ $V$-ren bi oinarriak non:*

$$M_{\beta}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{eta}$$

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

$$M_{\beta'}(f)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

*Orduan* 1 *eta* $-1$*-en kopurua* , $(r,s)$, *berdina da bi matrizeetan.* $(r,s)$ *bikotea* $f$*-ren* **signatura** *deitzen da eta denotatuko dugu* $sig(f)$.

**Adibidea.** Izan bedi $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Orduan $\beta=\{e_1,e_2,(-1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala da $f$-rekiko. Gainera $M_\beta(f)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ denez $sig(f)=(1,1)$ da.

■

**Ondorioa 5.0.3.** *Izan bitez A matrize simetrikoa. Demagun existitzen direla* $P_1$ *eta* $P_2$ *matrize alderanzgarriak non:*

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

*eta*

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

*Orduan 1 eta $-1$-en kopurua , $(r, s)$, berdina da bi matrizeetan. $(r, s)$ bikotea $A$-ren* **signatura** *deitzen da eta denotatuko dugu $sig(A)$.*

**Adibidea.** Izan bedi $MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrize simetrikoa. Orduan $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ harturik:

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Beraz $sig(A) = (1, 1)$ da.

■

**Teorema 5.0.4.** *1.- Izan bitez $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa, eta $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa. Orduan:*

$$
Af - ri \text{ elkartuta dago } \Leftrightarrow sig(f) = sig(A).
$$

*2.- Izan bitez $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoak. Orduan:*

$$
A \text{ eta } B \text{ kongruenteak dira } \Leftrightarrow sig(A) = sig(B).
$$

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia