

4. Gaia 3

Ortogonalitasuna. Forma ez-endakatuak

Hemendik aurrera $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa izango da beti.

Definizioa 3.0.1. *Bi bektoreak $v, w \in V$ f -rekiko **ortogonalak** direla esango dugu, eta idatzi $v \perp w$, baldin eta $f(v, w) = 0$.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa non:

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan oinarri kanonikoko bektoreak elkarren artean f -rekiko ortogonalak dira.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan forma simetrikoa da eta e_1, e_2 bektoreak ez dira ortogonalak f -rekiko eta e_2 bere buruarekin ortogonalak da.

■



Definizioa 3.0.2. Izan bedi $S \subseteq V$. S -ren **ortogonal** f -rekiko, S^\perp denotatuko duguna hurrengo multzoa da:

$$S^\perp = \{v \in V \mid f(v, s) = 0, \forall s \in S\}$$

Bereziki S^\perp f -ren **nukleoa** deitzen da.

Teorema 3.0.3. Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineala. Orduan:

- (i) $\{O\}^\perp = V$ da.
- (ii) $S \subseteq V$ azpimultzoa bada S^\perp azpiespazioa da beti.
- (iii) $W = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ azpiespazioa bada orduan $W^\perp = \{v \in V \mid f(v, v_i) = 0, \forall i = 1, \dots, s\}$, hau da, bektore bat W -ko bektore guztiekiko ortogonal izateko nahikoa eta beharrezkoa da sistema sortzaile bateko bektoreekiko ortogonal izatea.

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa non:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan:

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ bada orduan $W^\perp = \langle (1, 1, -1) \rangle$ da.

(b) $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{0\}$ da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ bada orduan $W^\perp = \langle (-1, 1, -1) \rangle$ da.

(b) $\mathbb{R}^{3\perp} = \langle (-1, 1, 1) \rangle$.

■

Definizioa 3.0.4. *Izan $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa. f ez-endakatuia dela esaten da baldin eta f -ren nukleoa 0 bada, hau da, $V^\perp = \{0\}$ bada.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa non:

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f ez-endakatuia da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan f ez da ez-endakatuia. ■

Teorema 3.0.5. *Izan bitez f forma bilineal eta simetrikoa eta A f -ri elkar-tutako matrizea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ oinarriarekiko. Orduan:*

f ez-endakatuia da $\Leftrightarrow A$ alderantzgarria bada