4. Gaia 3

Ortogonaltasuna. Forma ez-endakatuak

[1]

Hemendik aurrera $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa izango da beti.

Definizioa 3.0.1. *Bi bektoreak $v, w \in V$ f-rekiko* **ortogonalak** *direla esango dugu, eta idatzi $v \perp w$, baldin eta $f(v, w) = 0$.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan oinarri kanonikoko bektoreak elkarren artean f-rekiko ortogonalak dira.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan forma simetrikoa da eta e_1, e_2 bektoreak ez dira ortogonalak f-rekiko eta e_2 bere buruarekin ortogonala da.

■

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Definizioa 3.0.2. *Izan bedi $S \subseteq V$. S-ren* **ortogonala** *f-rekiko, $S^\perp$ denotatuko duguna hurrengo multzoa da:*

$$S^\perp = \{v \in V \quad | \quad f(v,s) = 0, \forall s \in S\}$$

Bereziki $S^\perp$ f-ren **nukleoa** *deitzen da.*

Teorema 3.0.3. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala. Orduan:*

- *(i) $\{O\}^\perp = V$ da.*
- *(ii) $S \subseteq V$ azpimultzoa bada $S^\perp$ azpiespazioa da beti.*
- *(iii) $W = \langle v_1, ..., v_s \rangle$ azpiespazioa bada orduan $W^\perp = \{v \in V \quad | \quad f(v, v_i) = 0, \forall i = 1, ..., s\}$, hau da, bektore bat W-ko bektore guztiekiko ortogonala izateko nahikoa eta beharrezkoa da sistema sortzaile bateko bektoreekiko ortogonala izatea.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$f((x_1, x_2, x_3)), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

Orduan:

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y - z = 0\}$ bada orduan $W^\perp = \langle (1, 1, -1) \rangle$ da.

(b) $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{0\}$ da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan:

$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y - z = 0\}$ bada orduan $W^\perp = \langle (-1, 1, -1) \rangle$ da.

(b) $\mathbb{R}^{3\perp} = \langle (-1, 1, 1) \rangle$.

■

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Definizioa 3.0.4. *Izan $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. f* **ez-endakatua** *dela esaten da baldin eta f-ren nukleoa 0 bada, hau da, $V^{\perp} = \{0\}$ bada.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f ez-endakatua da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan f ez da ez-endakatua.

■

Teorema 3.0.5. *Izan bitez f forma bilineal eta simetrikoa eta A f-ri elkartutako matrizea $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ oinarriarekiko. Orduan:*

$$f \textit{ ez-endakatua da } \Leftrightarrow A \textit{ alderanzgarria bada}$$

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia