4. Gaia 4

Oinarri Ortogonalak

Definizioa 4.0.1. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V ren oinarri bat bf ortogonala del esaten da baldin eta $f(v_i, v_j) = 0$ bada, $\forall i \neq j$.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan oinarri kanonikoa oinarri ortogonala da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan oinarri kanonikoa ez da ortogonala f-rekiko baina $\beta = \{(1,1), (1,-1)\}$ oinarri ortogonala da f-rekiko.

■

Ohartu β f-rekiko oinarri ortogonala dela baldin esta soilik baldin $M_\beta(f)$ matrize diagonala bada.

Definizioa 4.0.2. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. $v \in V$ bektore* **isotropoa** *dela esaten da baldin eta $f(v, v) = 0$ bada.*

Oharrak 4.0.3. *1.- 0 bektore isotropoa da beti.*

2.- Bektore isotropoen multzoa ez da azpiespazio bektoriala.

Adibidea. *Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:*

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan e_1, e_2 bektore isotropoak dira baina $e_1 + e_2$ ez da isotropoa.

■

3.- Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa eta demagun bektore guztiak isotropoak direla. Orduan $f(v, .w) = 0, \forall v, w \in V$.

Egoera honetan V-ren edozein oinarria ortogonala da beti.

Lema 4.0.4. *Izan bedi $v \in V$ bektore ez-isotropoa. Orduan:*

$$V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$$

Teorema 4.0.5. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. Orduan existitzen da β V-ren oinarri ortogonala.*

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{\beta_k}(f)$ simetrikoa denez f simetrikoa da beraz, aurreko teoremaren arabera, existitzen da β $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala. Oinarri aurkitzeko aurreko teoremaren frogapenean agertzen den argudioa erabiliko dugu.

$e_1 \imath \mathbb{R}^3$ bektore ez-isotropoa da $f(e_1, e_1) = 1$ baita. Orduan :

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^{\perp}$$

Kalkula dezagun $\langle e_1 \rangle^{\perp}$ azpiespazioa. $\langle e_1 \rangle^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad f((x, y, z), e_1) = 0\}$. Beraz $\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$ da.

$e_2 \in \langle e_1 \rangle^{\perp}$ bektore ez-isotropoa da $f(e_2, e_2) = -1$ baita. Orduan:

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle^{\perp}$$

Kalkula dezagun $\langle e_1, e_2\rangle^{\perp}$ azpiespazioa. Argi eta garbi $\langle e_1, e_2\rangle^{\perp} = \langle(-1,1,1)\rangle$ da. Orduan $\beta = \{e_1, e_2, (-1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala da f-rekiko.

■

Ondorioa 4.0.6. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize simetrikoa. Orduan existitzen da P matrize alderanzgarria non:*

$$ {}^{t}PAP = D \ \textit{diagonala} $$

Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal,simetrikoa eta ez-endakatua. f forma bilineal eta simetrikoa denez existitzen da $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarri ortogonala. Orduan:

$$ M_\beta(f) = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(v_2,v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix} $$

f ez-endakatua bada orduan $M_\beta(f)$ matrize alderanzgarria izan behar du. Beraz $f(v_1,v_1) \neq 0, ..., f(v_n,v_n) \neq 0$ hau da oinarri ortogonaleko bektore guztiak ez-isotropoak dira. Orduan $f : V \times V \to K$ forma bilineal,simetrikoa eta ez-endakatua bada existitzen da bektore ez-isotropoekin osatutako oinarri ortogonala. Argi eta garbi, beste inplikazioa ere betetze da.

Definizioa 4.0.7. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarri* **ortonormala** *dela esaten da baldin eta:*

(i) β oinarri ortogonala bada.

(ii) $f(v_i, v_i) = 1$ bada $i = 1, ..., n$.

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$ f((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n $$

Orduan β_k oinarri kanonikoa oinarri ortonormala da f-rekiko.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$ f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1, \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 $$

Orduan β_k oinarri kanonikoa ez da oinarri ortonormala, ortogonala ez delako. $\beta = \{(1,1),(-1,1)\}$ oinarri ortogonala da baina ez da ortonormala $f((1,1),(1,1)) = 2$ baita. ∎

Oharrak 4.0.8. *1.- Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa eta β V-ren oinarria. Orduan:*

$$\beta \textit{ oinarri ortonormala da } \Leftrightarrow M_\beta(f) = I_n$$

2.- Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. Demagun β V-ren oinarri ortonormala dela orduan f ez-endakatua izan behar du. Beste inplikazioa ez da betetzen.

Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakatuta. Dakigunez existitzen da $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ bektore ez-isotropoekin osatutako oinarri ortogonala. Bestalde ohartu:

$$f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v, v)$$

Orduan $1 = f(\lambda v, \lambda v)$ lortu nahi badugu nahikoa da $\lambda = \frac{1}{\sqrt{f(v,v)}}$ aukeratzen badugu. Beraz, ideia hau oinarri ortogonalera eramaten badugu, $\beta' = \{\frac{1}{\sqrt{f(v_1,v_1)}} v_1, ..., \frac{1}{\sqrt{f(v_n,v_n)}} v_n\}$ V-ren oinarri ortonormala da.

Oharra 4.0.9. *Aurreko argudioan badago arazo bat $\frac{1}{\sqrt{f(v,v)}} \in K$ dela zihurtatu al daiteke?. Gorputzak bereiztuko ditugu:*

1.- $K = \mathbb{C}$ bada ez dago inolako arazorik.

2.- $K = \mathbb{R}$ bada $f(v,v)$ negatiboa deneko kasuan arazoak daude.

Beraz, aurrekoarekin hurrengo teorema frogatu dugu:

Teorema 4.0.10. *1.- Izan bedi $f = V \times V \to \mathbb{C}$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakatua. Orduan existitzen da β' V-ren oinarri ortonormala f-rekiko.*

2.- Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrize simetrikoa eta alderanzgarria. Orduan existitzen da P matrize alderanzgarria non:

$$^tPAP = I_n$$