

4. Gaia 4

Oinarri Ortogonalak

1

Definizioa 4.0.1. *Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa. $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ V ren oinarri bat f ortogonala dela esaten da baldin eta $f(v_i, v_j) = 0$ bada, $\forall i \neq j$.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa non:

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan oinarri kanonikoa oinarri ortogonala da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan oinarri kanonikoa ez da ortogonala f -rekiko baina $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$ oinarri ortogonalak f -rekiko.

■

Ohartu β f -rekiko oinarri ortogonalak dela baldin eta soilik baldin $M_{\beta}(f)$ matrize diagonalak bada.

Definizioa 4.0.2. *Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa. $v \in V$ bektore **isotropoa** dela esaten da baldin eta $f(v, v) = 0$ bada.*

¹OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

2

Oharrak 4.0.3. 1.- 0 bektore isotropoa da beti.

2.- Bektore isotropoen multzoa ez da azpiespazio bektoriala.

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan e_1, e_2 bektore isotropoak dira baina $e_1 + e_2$ ez da isotropoa.

■

3.- Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa eta demagun bektore guztiak isotropoak direla. Orduan $f(v, w) = 0, \forall v, w \in V$.

Egoera honetan V -ren edozein oinarria ortogonal da beti.

Lema 4.0.4. Izan bedi $v \in V$ bektore ez-isotropoa. Orduan:

$$V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$$

Teorema 4.0.5. Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa. Orduan existitzen da β V -ren oinarri ortogonal.

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{\beta_k}(f)$ simetrikoa denez f simetrikoa da beraz, aurreko teoremaren arabera, existitzen da β \mathbb{R}^3 -ren oinarri ortogonal. Oinarri aurkitzeko aurreko teoremaren frogapenean agertzen den argudioa erabiliko dugu.

$e_1 \mathbb{R}^3$ bektore ez-isotropoa da $f(e_1, e_1) = 1$ baita. Orduan :

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$$

Kalkula dezagun $\langle e_1 \rangle^\perp$ azpiespazioa. $\langle e_1 \rangle^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x, y, z), e_1) = 0\}$. Beraz $\langle e_1 \rangle^\perp = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$ da.

$e_2 \in \langle e_1 \rangle^\perp$ bektore ez-isotropoa da $f(e_2, e_2) = -1$ baita. Orduan:

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$$

²OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

3

Kalkula dezagun $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp$ azpiespazioa. Argi eta garbi $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp = \langle (-1, 1, 1) \rangle$ da. Orduan $\beta = \{e_1, e_2, (-1, 1, 1)\}$ \mathbb{R}^3 -ren oinarri ortogonalak da f -rekiko. ■

Ondorioa 4.0.6. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize simetrikoa. Orduan existitzen da P matrize alderanzgarria non:*

$${}^tPAP = D \text{ diagonalak}$$

Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakaturia. f forma bilineal eta simetrikoaenez existitzen da $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ V -ren oinarri ortogonalak. Orduan:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(v_2, v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

f ez-endakaturia bada orduan $M_\beta(f)$ matrize alderanzgarria izan behar du. Beraz $f(v_1, v_1) \neq 0, \dots, f(v_n, v_n) \neq 0$ hau da oinarri ortogonaleko bektore guztiak ez-isotropoak dira. Orduan $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakaturia bada existitzen da bektore ez-isotropoekin osatutako oinarri ortogonalak. Argi eta garbi, beste inplikazioa ere betetze da.

Definizioa 4.0.7. *Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa. $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ V -ren oinarri **ortonormala** dela esaten da baldin eta:*

(i) β oinarri ortogonalak bada.

(ii) $f(v_i, v_i) = 1$ bada $i = 1, \dots, n$.

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal non:

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan β_k oinarri kanonikoa oinarri ortonormalak da f -rekiko.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal non:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

³OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

4

Orduan β_k oinarri kanonikoa ez da oinarri ortonormala, ortogonalak ez delako. $\beta = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ oinarri ortogonalak da baina ez da ortonormala $f((1, 1), (1, 1)) = 2$ baita.

Oharra 4.0.8. 1.- Izan bitez $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa eta β V -ren oinarria. Orduan:

$$\beta \text{ oinarri ortonormalak da} \Leftrightarrow M_\beta(f) = I_n$$

2.- Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa. Demagun β V -ren oinarri ortonormalak dela orduan f ez-endakatua izan behar du. Beste inplikazioa ez da betetzen.

Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakatuta. Dakigunez existitzen da $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ bektore ez-isotropoekin osatutako oinarri ortogonalak. Bestalde ohartu:

$$f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v, v)$$

Orduan $1 = f(\lambda v, \lambda v)$ lortu nahi badugu nahikoa da $\lambda = \frac{1}{\sqrt{f(v, v)}}$ aukeratu badugu. Beraz, ideia hau oinarri ortogonalera eramaten badugu, $\beta' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{f(v_1, v_1)}} v_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{f(v_n, v_n)}} v_n \right\}$ V -ren oinarri ortonormalak da.

Oharra 4.0.9. Aurreko argudioan badago arazo bat $\frac{1}{\sqrt{f(v, v)}} \in K$ dela zihurtatu al daiteke?. Gorputzak bereiztuko ditugu:

- 1.- $K = \mathbb{C}$ bada ez dago inolako arazorik.
- 2.- $K = \mathbb{R}$ bada $f(v, v)$ negatiboa deneko kasuan arazoak daude.

Beraz, aurrekoarekin hurrengo teorema frogatu dugu:

Teorema 4.0.10. 1.- Izan bedi $f = V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakatua. Orduan existitzen da β' V -ren oinarri ortonormalak f -rekiko.

2.- Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrize simetrikoa eta alderanzgarria. Orduan existitzen da P matrize alderanzgarria non:

$${}^t P A P = I_n$$

⁴OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia