4. Gaia 7

Forma Kuadratikoak

Atal honetan V $\mathbb{R}$-espazio bektoriala izango da beti.

Definizioa 7.0.1. *Izan bedi $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa. f-ri elkartuta* **forma kuadratikoa** *hurrengo aplikazioa da:*

$$\begin{array}{cccc} q & : & V & \to & \mathbb{R} \\ & & v & \mapsto & f(v,v) \end{array}$$

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da non $q(x_1,...,x_n) = f((x_1,...,x_n),(x_1,...,x_n)) = x_1^2 + ... + x_n^2, \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ den.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1, \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Orduan $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ da non $q(x_1,x_2) = x_1x_2 + x_2x_1 = 2x_1x_2, \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ den. ■

Definizioa 7.0.2. *Izan bitez $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa eta $q : V \to \mathbb{R}$ elkartutako forma kuadratikoa. Orduan q ez-endakatua (positiboki definitua,...) dela esaten da baldin eta f ez-endakatua (positiboki definitua,...) bada.*

Teorema 7.0.3. *Izan bitez $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa eta $q : V \to \mathbb{R}$ elkartutako forma kuadratikoa. Orduan:*

- *(i) $q(0) = 0$ da.*
- *(ii) $q(\lambda v) = \lambda q(v), \forall \lambda \in K, \forall v \in V$. Beraz q ez da aplikazio lineala.*
- *(iii) v isotropoa da baldin eta soilik baldin $q(v) = 0$ bada.*
- *(iv) q positiboki definitua da baldin eta soilik baldin $q(v) \geq 0$ bada $\forall v \in V$. Era berean, q negatiboki definitua da baldin eta soilik baldin $q(v) \leq 0$ bada $\forall v \in V$*
- *(v) $f(u, v) = \frac{q(u+v)-q(u)-q(v)}{2}, \forall u, v \in V$.*
- *(vi) Izan bedi $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ V-ren oinarri ortogonala non:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

  Orduan $q(v) = \lambda_1^2 + ... + \lambda_r^2 - \lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2, \forall v \in V$. Forma kuadratikoaren adierazpen hau **karratuen bidezko adierazpena edo karratu independenteen adierazpena** *deitzen da.*

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan forma kuadratikoa $q(x, y, z) = x^2 + 2xz - y^2 + zy$ da $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}$.

Bestalde $\beta = \{e_1, e_2, (-1,1,1)\}$ f-rekiko oinarri ortogonala denez non $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ den. Orduan $q(x,y,z) = (x+z y-z z) M_\beta(f) \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \\ z \end{pmatrix} = (x+z)^2 - (y-z)^2$ da $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Eta azken hau da, karratu independenteen adierazpena.

$\blacksquare$