

4. Gaia 7

Forma Kuadratikoa

1

Atal honetan V \mathbb{R} -espazio bektoriala izango da beti.

Definizioa 7.0.1. *Izan bedi $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa. f -ri elkartuta forma kuadratikoa hurrengo aplikazioa da:*

$$\begin{aligned} q & : V \rightarrow \mathbb{R} \\ v & \mapsto f(v, v) \end{aligned}$$

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da non $q(x_1, \dots, x_n) = f((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = x_1^2 + \dots + x_n^2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ den.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Orduan $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ da non $q(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 2x_1 x_2, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ den. ■

Definizioa 7.0.2. *Izan bitez $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa eta $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ elkartutako forma kuadratikoa. Orduan q ez-endakaturia (positiboki definitua,...) dela esaten da baldin eta f ez-endakaturia (positiboki definitua,...) bada.*

¹OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

2

Teorema 7.0.3. *Izan bitez $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa eta $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ elkartutako forma kuadratikoa. Orduan:*

- (i) $q(0) = 0$ da.
- (ii) $q(\lambda v) = \lambda q(v), \forall \lambda \in K, \forall v \in V$. Beraz q ez da aplikazio lineala.
- (iii) v isotropoa da baldin eta soilik baldin $q(v) = 0$ bada.
- (iv) q positiboki definitua da baldin eta soilik baldin $q(v) \geq 0$ bada $\forall v \in V$. Era berean, q negatiboki definitua da baldin eta soilik baldin $q(v) \leq 0$ bada $\forall v \in V$.
- (v) $f(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}, \forall u, v \in V$.
- (vi) Izan bedi $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ V -ren oinarri ortogonal non:

$$M_{\beta}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan $q(v) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_r^2 - \lambda_{r+1}^2 - \dots - \lambda_{r+s}^2, \forall v \in V$. Forma kuadratikoaren adierazpen hau **karratuen bidezko adierazpena edo karratu independenteen adierazpena** deitzen da.

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan forma kuadratikoa $q(x, y, z) = x^2 + 2xz - y^2 + zy$ da $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}$.

²OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

3

Bestalde $\beta = \{e_1, e_2, (-1, 1, 1)\}$ f -rekiko oinarri ortogonalak denez non $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ den. Orduan $q(x, y, z) = (x+z, y-z, z) M_\beta(f) \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \\ z \end{pmatrix} = (x+z)^2 - (y-z)^2$ da $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Eta azken hau da, karratu independenteen adierazpena.

■