4. Gaia 1

Forma Bilinealaren Definizioa eta Propietateak

Definizioa 1.0.1. *Izan bedi V K espazio bektoriala. $f : V \times V \to K$ aplikazio bat V gaineko* **forma bilineala** *dela esaten da hurrengo propietateak betetzen baditu:*

(i) $f(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha f(v_1, w) + \beta f(v_2, w), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, w \in V.$

(ii) $f(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha f(v, w_1) + \beta f(v, w_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w_1, w_2 \in V.$

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala da.

Kasu orokorra:

Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan f $\mathbb{R}^n$ gaineko forma bilineala da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2 + 1 + x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f ez da $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala da.

■

Oharra 1.0.2. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala.*

1.- f forma deitzen da helburu-multzoa K delako.

2.- f bilineala deitzen da hurrengo arrazoiarengatik: $v_o \in V$ bektore finkoa bada hurrengo bi aplikazioak linealak dira:

(i) $f_1 : V \to K$ non $f_1(v) = f(v_o, w), \forall w \in V$.

(ii) $f_2 : V \to K$ non $f_1(v) = f(v, v_o), \forall v \in V$.

Horregatik deitzen da f forma bilineala, lineala delako bi osagaietan.

Teorema 1.0.3. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala orduan hurrengo propietateak betetzen dira:*

- *(i) $f(0, w) = f(v, 0) = 0, \forall v, w \in V$.*
- *(ii) $f(-v, w) = -f(v, w) = f(v, -w), \forall v, w \in V$.*
- *(iii) $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, w) = \lambda_1 f(v_1, w) + ... + \lambda_n f(v_n, w), \forall v_1, ..., v_n, w \in V, \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Era berean, $f(v, \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n) = \lambda_1 f(v, w_1) + ... + \lambda_n f(v, w_n), \forall w_1, ..., w_n, v \in V, \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in K$.*

Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria. Orduan:

$$f(v,w) = f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, w) = \alpha_1 f(v_1, w) + ... \alpha_n f(v_n, w) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} f(v_1, w) \\ \vdots \\ f(v_n, w) \end{pmatrix}$$

Orain gauza bera egingo dugu bigarren osagaiarekin:

$$f(v_i, w) = f(v_i, \beta_1 v_1, ..., \beta_n v_n) = \beta_1 f(v_i, v_1) + ... + \beta_n f(v_i, v_n) =$$

$$= (f(v_i, v_1) \cdots f(v_i, v_n)) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, i = 1, ..., n.$$

Beraz hasierako berdintza honela geldintzen zaigu:

$$f(v,w) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Laburbilduz $f(v,w) = {}^tXAY$ non:

1.- X v bektorearen koordenatuak diren $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ oinarrian.

2.- Y w bektorearen koordenatuak diren $\beta_V' = \{w_1, ..., w_n\}$ oinarrian.

3.- $A = (f(v_i, v_j)$ matrizea da, hau da, $n \times n$ ordenakoa eta (i,j) elementua lortzeko $f(v_i, v_j)$ kalkulatu behar dugu.

Definizioa 1.0.4. *Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarri bat. f-ri elkartutako matrizea β oinarriarekiko, $M_\beta(f)$ denotatuko duguna, hurrengo matrizea da:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

Aurrekoarekin hurrengo teorema frogatu dugu.

Teorema 1.0.5 (Forma Bilineal Baten Adierazpen Matriziala)**.** *Izan bitez $f : V \times V \to k$ forma bilineala eta $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$, $\beta_V' = \{w_1, ..., w_n\}$ V-ren bi oinarriak. Orduan:*

$$f(v,w) = {}^tXAY$$

Non X v-ren koordenatuak β_V oinarriarekiko eta Y w-ren koordenatuak β_V' diren.

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko I_n matrizea da.

2.-Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Orduan f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Matrize karratu bati forma bilineal bat ere elkartu ahal zaio. Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratu bat. Definitzen dugu $f : K^n \times K^n \to K$:

$$f((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = (x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Orduan erraz konprobatzen da f K^n gaineko forma bilineala dela.

Orain ikus dezagun elkartutako matrizeen arteko erlazioa. Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta = \{v_1, ..., v_n\}, \beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V-ren bi oinarriak. Zer erlazio dago $M_\beta(f)$ eta $M_{\beta'}(f)$ matrizeen artean?. Dakigunez $\forall v, w \in V, f(v, w)$ bi modutara adieraz daiteke:

1.- $f(v, w) = {}^tXM_\beta(f)Y$, non X eta Y v eta w-ren koordenatuak diren β oinarrian.

2.- $f(v, w) = {}^tX'M_{\beta'}(f)Y'$, non X' eta Y' v eta w-ren koordenatuak diren β' oinarrian.

Gainera, dakigunez $M^\beta_{\beta'}X' = X$ eta $M^\beta_{\beta'}Y' = Y$. Beraz:

$$f(v, w) = {}^tXM_\beta(f)Y = {}^t(M^\beta_{\beta'}X')M_\beta(f)M^\beta_{\beta'}Y' = {}^tX'\,{}^tM^\beta_{\beta'}M_\beta(f)M^\beta_{\beta'}Y' = {}^tX'M_{\beta'}(f)Y'$$

Orduan $M_{\beta'}(f) = {}^tM^\beta_{\beta'}M_\beta(f)M^\beta_{\beta'}$. Beraz frogatu dugu hurrengo teorema:

Teorema 1.0.6. *Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta = \{v_1, ..., v_n\}, \beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V-ren bi oinarriak. Orduan:*

$$M_{\beta'}(f) = {}^tM^\beta_{\beta'}M_\beta(f)M^\beta_{\beta'}$$

Definizioa 1.0.7. *Izan bitez $A, B \in M_n(K)$ matrizeak. A B-rekin* **kongruentea** *dela esaten da existitzen bada P matrize alderanzgarria non ${}^tPAP = B$ betetzen den.*

Adibidea. Aurreko teoremaren arabera, forma bilineal bati elkartutako matrize guztiak kongruenteak dira.

■

Orduan gaiaren helburuak hurrengo galderen erantzuna bilatzea izango da:

Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala.

1.- Existitzen al da β V-ren oinarri bat non $M_\beta(f)$ diagonala den?

2.- $A \in M_n(K)$ bada nola dakigu A f-ri elkartuta dagoen ala ez?

Eta galdera baliokideak ditugu matrize karratuen kasuan ere:

Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratua.

1.- Existitzen al da P matrize alderanzgarria non ${}^tPAP$ diagonala den?

2.- $B \in M_n(K)$ bada nola dakigu A eta B kongruenteak diren ala ez?
