4. Gaia 1

Forma Bilinealak

1.1 Forma Bilinealaren Definizioa eta Propietateak

Definizioa 1.1.1. *Izan bedi V K espazio bektoriala. $f : V \times V \to K$ aplikazio bat V gaineko* **forma bilineala** *dela esaten da hurrengo propietateak betetzen baditu:*

(i) $f(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha f(v_1, w) + \beta f(v_2, w), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, w \in V.$

(ii) $f(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha f(v, w_1) + \beta f(v, w_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w_1, w_2 \in V.$

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala da.

Kasu orokorra:

Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan f $\mathbb{R}^n$ gaineko forma bilineala da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2 + 1 + x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f ez da $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala da.

■

Oharra 1.1.2. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala.*

1.- f forma deitzen da helburu-multzoa K delako.

2.- f bilineala deitzen da hurrengo arrazoiarengatik: $v_o \in V$ bektore finkoa bada hurrengo bi aplikazioak linealak dira:

(i) $f_1 : V \to K$ non $f_1(v) = f(v_o, w), \forall w \in V$.

(ii) $f_2 : V \to K$ non $f_1(v) = f(v, v_o), \forall v \in V$.

Horregatik deitzen da f forma bilineala, lineala delako bi osagaietan.

Teorema 1.1.3. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala orduan hurrengo propietateak betetzen dira:*

- *(i) $f(0, w) = f(v, 0) = 0, \forall v, w \in V$.*
- *(ii) $f(-v, w) = -f(v, w) = f(v, -w), \forall v, w \in V$.*
- *(iii) $f(\lambda_1v_1 + ... + \lambda_nv_n, w) = \lambda_1f(v_1, w) + ... + \lambda_nf(v_n, w), \forall v_1, ..., v_n, w \in V, \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Era berean, $f(v, \lambda_1w_1 + ... + \lambda_nw_n) = \lambda_1f(v, w_1) + ... + \lambda_nf(v, w_n), \forall w_1, ..., w_n, v \in V, \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in K$.*

Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria. Orduan:

$$f(v, w) = f(\alpha_1v_1 + ... + \alpha_nv_n, w) = \alpha_1f(v_1, w) + ... \alpha_nf(v_n, w) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} f(v_1, w) \\ \vdots \\ f(v_n, w) \end{pmatrix}$$

Orain gauza bera egingo dugu bigarren osagaiarekin:

$$f(v_i, w) = f(v_i, \beta_1v_1, ..., \beta_nv_n) = \beta_1f(v_i, v_1) + ... + \beta_nf(v_i, v_n) =$$

$$= (f(v_i, v_1) \cdots f(v_i, v_n)) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, i = 1, ..., n.$$

Beraz hasierako berdintza honela geldintzen zaigu:

$$f(v, w) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_n, v_1) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Laburbilduz $f(v, w) = {}^t XAY$ non:

1.- X v bektorearen koordenatuak diren $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ oinarrian.

2.- Y w bektorearen koordenatuak diren $\beta'_V = \{w_1, ..., w_n\}$ oinarrian.

3.- $A = (f(v_i, v_j)$ matrizea da, hau da, $n \times n$ ordenakoa eta (i, j) elementua lortzeko $f(v_i, v_j)$ kalkulatu behar dugu.

Definizioa 1.1.4. *Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarri bat. f-ri elkartutako matrizea β oinarriarekiko, $M_\beta(f)$ denotatuko duguna, hurrengo matrizea da:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_n, v_1) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

Aurrekoarekin hurrengo teorema frogatu dugu.

Teorema 1.1.5 (Forma Bilineal Baten Adierazpen Matriziala)**.** *Izan bitez $f : V \times V \to k$ forma bilineala eta $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$, $\beta'_V = \{w_1, ..., w_n\}$ V-ren bi oinarriak. Orduan:*

$$f(v, w) = {}^t XAY$$

Non X v-ren koordenatuak β_V oinarriarekiko eta Y w-ren koordenatuak β'_V diren.

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko I_n matrizea da.

2.-Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2, \forall(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Orduan f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Matrize karratu bati forma bilineal bat ere elkartu ahal zaio. Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratu bat. Definitzen dugu $f : K^n \times K^n \to K$:

$$f((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = (x_1 \cdots x_n)A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Orduan erraz konprobatzen da f K^n gaineko forma bilineala dela.

Orain ikus dezagun elkartutako matrizeen arteko erlazioa. Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta = \{v_1, ..., v_n\}, \beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V-ren bi oinarriak. Zer erlazio dago $M_\beta(f)$ eta $M_{\beta'}(f)$ matrizeen artean?. Dakigunez $\forall v, w \in V, f(v, w)$ bi modutara adieraz daiteke:

1.- $f(v, w) = {}^tXM_\beta(f)Y$, non X eta Y v eta w-ren koordenatuak diren β oinarrian.

2.- $f(v, w) = {}^tX'M_{\beta'}(f)Y'$, non X' eta Y' v eta w-ren koordenatuak diren β' oinarrian.

Gainera, dakigunez $M^\beta_{\beta'}X' = X$ eta $M^\beta_{\beta'}Y' = Y$. Beraz:

$$f(v, w) = {}^tXM_\beta(f)Y = {}^t(M^\beta_{\beta'}X')M_\beta(f)M^\beta_{\beta'}Y' = {}^tX'{}^tM^\beta_{\beta'}M_\beta(f)M^\beta_{\beta'}Y' = {}^tX'M_{\beta'}(f)Y'$$

Orduan $M_{\beta'}(f) = {}^tM^\beta_{\beta'}M_\beta(f)M^\beta_{\beta'}$. Beraz frogatu dugu hurrengo teorema:

Teorema 1.1.6. *Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta = \{v_1, ..., v_n\}, \beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V-ren bi oinarriak. Orduan:*

$$M_{\beta'}(f) = {}^tM^\beta_{\beta'}M_\beta(f)M^\beta_{\beta'}$$

Definizioa 1.1.7. *Izan bitez $A, B \in M_n(K)$ matrizeak. A B-rekin* **kongruentea** *dela esaten da existitzen bada P matrize alderanzgarria non ${}^tPAP = B$ betetzen den.*

Adibidea. Aurreko teoremaren arabera, forma bilineal bati elkartutako matrize guztiak kongruenteak dira.

■

Orduan gaiaren helburuak hurrengo galderen erantzuna bilatzea izango da:

Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala.

1.- Existitzen al da β V-ren oinarri bat non $M_\beta(f)$ diagonala den?

2.- $A \in M_n(K)$ bada nola dakigu A f-ri elkartuta dagoen ala ez?

Eta galdera baliokideak ditugu matrize karratuen kasuan ere:

Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratua.

1.- Existitzen al da P matrize alderanzgarria non ${}^tPAP$ diagonala den?

2.- $B \in M_n(K)$ bada nola dakigu A eta B kongruenteak diren ala ez?

1.2 Forma Bilineal Simetrikoak

Definizioa 1.2.1. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala. f* **simetrikoa** *dela esaten da hurrengo propietatea betetzen badu:*

$$f(v, w) = f(w, v), \forall v, w \in V$$

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f simetrikoa da.

2.-Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Orduan f ez da simetrikoa.

■

Teorema 1.2.2. *Izan bitez $f : V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$, $\beta'_V = \{w_1, ..., w_n\}$ V-ren bi oinarriak. Orduan:*

$$f \text{ simetrikoa da } \Leftrightarrow A = M_{\beta_V}^{\beta'_V}(f) \text{ matrize simetrikoa bada}$$

1.3 Ortogonaltasuna. Forma ez-endakatuak

Hemendik aurrera $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa izango da beti.

Definizioa 1.3.1. *Bi bektoreak $v, w \in V$ f-rekiko* **ortogonalak** *direla esango dugu, eta idatzi $v \perp w$, baldin eta $f(v, w) = 0$.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan oinarri kanonikoko bektoreak elkarren artean f-rekiko ortogonalak dira.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan forma simetrikoa da eta e_1, e_2 bektoreak ez dira ortogonalak f-rekiko eta e_2 bere buruarekin ortogonala da.

■

Definizioa 1.3.2. *Izan bedi $S \subseteq V$. S-ren* **ortogonala** *f-rekiko, $S^\perp$ denotatuko duguna hurrengo multzoa da:*

$$S^\perp = \{v \in V \quad | \quad f(v,s) = 0, \forall s \in S\}$$

Bereziki $S^\perp$ f-ren **nukleoa** *deitzen da.*

Teorema 1.3.3. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineala. Orduan:*

- *(i) $\{O\}^\perp = V$ da.*
- *(ii) $S \subseteq V$ azpimultzoa bada $S^\perp$ azpiespazioa da beti.*
- *(iii) $W = \langle v_1, ..., v_s \rangle$ azpiespazioa bada orduan $W^\perp = \{v \in V \quad | \quad f(v, v_i) = 0, \forall i = 1, ..., s\}$, hau da, bektore bat W-ko bektore guztiekiko ortogonala izateko nahikoa eta beharrezkoa da sistema sortzaile bateko bektoreekiko ortogonala izatea.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, x_2, x_3)), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan:

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y - z = 0\}$ bada orduan $W^\perp = \langle (1, 1, -1) \rangle$ da.

(b) $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{0\}$ da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M^{\beta_k}_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - x_3y_3, \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y - z = 0\}$ bada orduan $W^\perp = \langle (-1, 1, -1) \rangle$ da.

(b) $\mathbb{R}^{3\perp} = \langle (-1, 1, 1) \rangle$.

■

Definizioa 1.3.4. *Izan $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. f* **ez-endakatua** *dela esaten da baldin eta f-ren nukleoa 0 bada, hau da, $V^{\perp} = \{0\}$ bada.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan f ez-endakatua da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Orduan f ez da ez-endakatua.

■

Teorema 1.3.5. *Izan bitez f forma bilineal eta simetrikoa eta A f-ri elkartutako matrizea $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ oinarriarekiko. Orduan:*

$$f \text{ ez-endakatua da } \Leftrightarrow A \text{ alderanzgarria bada}$$

1.4 Oinarri Ortogonalak

Definizioa 1.4.1. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V ren oinarri bat bf ortogonala del esaten da baldin eta $f(v_i, v_j) = 0$ bada, $\forall i \neq j$.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ applikazioa non:

$$f((x_1, ..., x_n)), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^3$$

Orduan oinarri kanonikoa oinarri ortogonala da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan oinarri kanonikoa ez da ortogonala f-rekiko baina $\beta = \{(1,1),(1,-1)\}$ oinarri ortogonala da f-rekiko.

■

Ohartu β f-rekiko oinarri ortogonala dela baldin esta soilik baldin $M_\beta(f)$ matrize diagonala bada.

Definizioa 1.4.2. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. $v \in V$ bektore* **isotropoa** *dela esaten da baldin eta $f(v,v) = 0$ bada.*

Oharrak 1.4.3. *1.- 0 bektore isotropoa da beti.*

2.- Bektore isotropoen multzoa ez da azpiespazio bektoriala.

Adibidea. *Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:*

$$A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan e_1, e_2 bektore isotropoak dira baina $e_1 + e_2$ ez da isotropoa.

■

3.- Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa eta demagun bektore guztiak isotropoak direla. Orduan $f(v,.w) = 0, \forall v, w \in V$.

Egoera honetan V-ren edozein oinarria ortogonala da beti.

Lema 1.4.4. *Izan bedi $v \in V$ bektore ez-isotropoa. Orduan:*

$$V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$$

Teorema 1.4.5. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. Orduan existitzen da β V-ren oinarri ortogonala.*

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{\beta_k}(f)$ simetrikoa denez f simetrikoa da beraz, aurreko teoremaren arabera, existitzen da β $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala. Oinarri aurkitzeko aurreko teoremaren frogapenean agertzen den argudioa erabiliko dugu.

$e_1 \mathbb{R}^3$ bektore ez-isotropoa da $f(e_1, e_1) = 1$ baita. Orduan :

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^{\perp}$$

Kalkula dezagun $\langle e_1 \rangle^{\perp}$ azpiespazioa. $\langle e_1 \rangle^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad f((x, y, z), e_1) = 0\}$. Beraz $\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$ da.

$e_2 \in \langle e_1 \rangle^{\perp}$ bektore ez-isotropoa da $f(e_2, e_2) = -1$ baita. Orduan:

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle^{\perp}$$

Kalkula dezagun $\langle e_1, e_2 \rangle^{\perp}$ azpiespazioa. Argi eta garbi $\langle e_1, e_2 \rangle^{\perp} = \langle (-1, 1, 1) \rangle$ da. Orduan $\beta = \{e_1, e_2, (-1, 1, 1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala da f-rekiko.

■

Ondorioa 1.4.6. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize simetrikoa. Orduan existitzen da P matrize alderanzgarria non:*

$$^tPAP = D \text{ } diagonala$$

Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal,simetrikoa eta ez-endakatua. f forma bilineal eta simetrikoa denez existitzen da $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarri ortogonala. Orduan:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(v_2, v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

f ez-endakatua bada orduan $M_\beta(f)$ matrize alderanzgarria izan behar du. Beraz $f(v_1, v_1) \neq 0, ..., f(v_n, v_n) \neq 0$ hau da oinarri ortogonaleko bektore guztiak ez-isotropoak dira. Orduan $f : V \times V \to K$ forma bilineal,simetrikoa eta ez-endakatua bada existitzen da bektore ez-isotropoekin osatutako oinarri ortogonala. Argi eta garbi, beste inplikazioa ere betetze da.

Definizioa 1.4.7. *Izan bedi $f : V \times V \to K$ forma bilineal eta simetrikoa. $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarri* **ortonormala** *dela esaten da baldin eta:*

(i) β oinarri ortogonala bada.

(ii) $f(v_i, v_i) = 1$ bada $i = 1, ..., n$.

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan β_k oinarri kanonikoa oinarri ortonormala da f-rekiko.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Orduan β_k oinarri kanonikoa ez da oinarri ortonormala, ortogonala ez delako. $\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$ oinarri ortogonala da baina ez da ortonormala $f((1,1),(1,1)) = 2$ baita.

■

Oharrak 1.4.8. *1.- Izan bitez $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa eta β V-ren oinarria. Orduan:*

$$\beta \textit{ oinarri ortonormala da } \Leftrightarrow M_\beta(f) = I_n$$

2.- Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal eta simetrikoa. Demagun β V-ren oinarri ortonormala dela orduan f ez-endakatua izan behar du. Beste inplikazioa ez da betetzen.

Izan bedi $f : V \times V \rightarrow K$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakatuta. Dakigunez existitzen da $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ bektore ez-isotropoekin osatutako oinarri ortogonala. Bestalde ohartu:

$$f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v, v)$$

Orduan $1 = f(\lambda v, \lambda v)$ lortu nahi badugu nahikoa da $\lambda = \frac{1}{\sqrt{f(v,v)}}$ aukeratzen badugu. Beraz, ideia hau oinarri ortogonalera eramaten badugu, $\beta' = \{\frac{1}{\sqrt{f(v_1,v_1)}}v_1, ..., \frac{1}{\sqrt{f(v_n,v_n)}}v_n\}$ V-ren oinarri ortonormala da.

Oharra 1.4.9. *Aurreko argudioan badago arazo bat $\frac{1}{\sqrt{f(v,v)}} \in K$ dela zihurtatu al daiteke?. Gorputzak bereiztuko ditugu:*

1.- $K = \mathbb{C}$ bada ez dago inolako arazorik.

2.- $K = \mathbb{R}$ bada $f(v,v)$ negatiboa deneko kasuan arazoak daude.

Beraz, aurrekoarekin hurrengo teorema frogatu dugu:

Teorema 1.4.10. *1.- Izan bedi $f = V \times V \to \mathbb{C}$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakatua. Orduan existitzen da β' V-ren oinarri ortonormala f-rekiko.*

2.- Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrize simetrikoa eta alderanzgarria. Orduan existitzen da P matrize alderanzgarria non:

$$^tPAP = I_n$$

1.5 Sylvesterren Inertzi-Legea

Hemendik aurrera $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa izango da. Hau da gorputza beti $\mathbb{R}$ izango da. Dakigunez existitzen da $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-re oinarri ortogonala f-rekiko. Oinarri honetan hurrengo egoera ematen dela suposa dezakegu, bestela oinarri bektoreak berrordenatu egingo genituzke:

$v_1, f(v_1, v_1) > 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{f(v_1,v_1)}} v_1$ bektorea.

$\vdots$

$v_r, f(v_r, v_r) > 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{f(v_r,v_r)}} v_r$ bektorea.

$v_{r+1}, f(v_{r+1}, v_{r+1}) < 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+1},v_{r+1})}} v_{r+1}$ bektorea.

$\vdots$

$v_{r+s}, f(v_{r+s}, v_{r+s}) < 0$ eta definitzen dugu $\frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+s},v_{r+s})}} v_{r+s}$ bektorea.

$v_{r+s+1}, f(v_{r+s+1}, v_{r+s+1}) = 0$ eta definitzen dugu v_{r+s+1} bektorea.

$\vdots$

$v_n, f(v_n, v_n) = 0$ eta definitzen dugu v_n bektorea.

β V-ren oinarri ortogonala denez:

$$\beta' = \{\frac{1}{\sqrt{f(v_1, v_1)}} v_1, ..., \frac{1}{\sqrt{f(v_r, v_r)}} v_r, \frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+1}, v_{r+1})}} v_{r+1}, ..., \frac{1}{\sqrt{-f(v_{r+s}, v_{r+s})}} v_{r+s},$$

$$, ..., v_{r+s+1}, ..., v_n\}$$

ere oinarri ortogonala da eta ganiera:

$$M_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.5.1. *Aurreko egoeran, $M_{\beta'}(f)$ matrizearen diagonaleko zero-kopurua f-ren nukleoaren dimentsioa da.*

Teorema 1.5.2 (Sylvesterren Inertzi-Legea)**.** *Izan bedi $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa. Demagun β eta β' V-ren bi oinarriak non:*

$$M_{\beta}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{eta}$$

$$M_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan 1 eta -1-en kopurua , (r,s), berdina da bi matrizeetan. (r,s) bikotea f-ren **signatura** *deitzen da eta denotatuko dugu $sig(f)$.*

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan $\beta = \{e_1, e_2, (-1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala da f-rekiko. Gainera $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ denez $sig(f) = (1,1)$ da.

■

Ondorioa 1.5.3. *Izan bitez A matrize simetrikoa. Demagun existitzen direla P_1 eta P_2 matrize alderanzgarriak non:*

$$^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

eta

$$^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan 1 eta −1-en kopurua , (r,s), berdina da bi matrizeetan. (r,s) bikotea A-ren **signatura** *deitzen da eta denotatuko dugu $sig(A)$.*

Adibidea. Izan bedi $MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrize simetrikoa. Orduan $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ harturik:

$$^{t}PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beraz $sig(A) = (1,1)$ da.

■

Teorema 1.5.4. *1.- Izan bitez $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa, eta $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa. Orduan:*

$$Af - ri \text{ elkartuta dago } \Leftrightarrow sig(f) = sig(A).$$

2.- Izan bitez $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoak. Orduan:

$$A \text{ eta } B \text{ kongruenteak dira } \Leftrightarrow sig(A) = sig(B).$$

1.6 Forma positiboki definituak eta negatiboki definituak

Definizioa 1.6.1. *Izan bedi $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa.*

1.-f **positiboki definitua** *dela esaten da baldin eta $f(v,v) \geq 0, \forall v \in V$ betetzen bada.*

2.-f **negatiboki definitua** *dela esaten da baldin eta $f(v,v) \leq 0, \forall v \in V$ betetzen bada.*

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan $f((x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)) = x_1^2 + ... + x_n^2 \geq 0, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ beraz f positiboki definitua da.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Orduan f ez da positiboki definitua $f((1, -1), (1, -1)) = -2$ baita eta ezta ere negatiboki definitua $f((1, 1), (1, 1)) = 2$ baita.

$\blacksquare$

Definizioa 1.6.2. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa.*

1.-A **positiboki definitua** *dela esaten da baldin eta ${}^tXAX \geq 0, \forall X$ betetzen bada.*

2.-f **negatiboki definitua** *dela esaten da baldin eta ${}^tXAX \leq 0, \forall X$ betetzen bada.*

Ohartu $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa bada. f positiboki definitua da baldin eta soilik baldin $M_\beta(f)$ matrizea positiboki definitua bada. Era berean negatiboki definituarekin.

Teorema 1.6.3. *Izan bedi $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal, simetrikoa eta ez-endakatua. Orduan hurrengo baieztapenak baliokideak dira:*

- *(i) Existitzen dira V-n f-rekiko oinarri ortonormalak.*
- *(ii) $sig(f) = (n, 0)$ da.*
- *(iii) f positiboki definitua da.*

Teorema 1.6.4. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa eta alderanzgarria. Orduan:*

$$A \text{ positiboki definitua } \Leftrightarrow sig(A) = (n, 0)$$

1.7 Forma Kuadratikoak

Atal honetan V $\mathbb{R}$-espazio bektoriala izango da beti.

Definizioa 1.7.1. *Izan bedi $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa. f-ri elkartuta* **forma kuadratikoa** *hurrengo aplikazioa da:*

$$\begin{array}{cccc} q & : & V & \to & \mathbb{R} \\ & & v & \mapsto & f(v,v) \end{array}$$

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \forall (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Orduan $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da non $q(x_1,...,x_n) = f((x_1,...,x_n),(x_1,...,x_n)) = x_1^2 + ... + x_n^2, \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ den.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1, \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Orduan $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ da non $q(x_1,x_2) = x_1x_2 + x_2x_1 = 2x_1x_2, \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ den. ■

Definizioa 1.7.2. *Izan bitez $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa eta $q : V \to \mathbb{R}$ elkartutako forma kuadratikoa. Orduan q ez-endakatua (positiboki definitua,...) dela esaten da baldin eta f ez-endakatua (positiboki definitua,...) bada.*

Teorema 1.7.3. *Izan bitez $f : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal eta simetrikoa eta $q : V \to \mathbb{R}$ elkartutako forma kuadratikoa. Orduan:*

- *(i) $q(0) = 0$ da.*
- *(ii) $q(\lambda v) = \lambda q(v), \forall \lambda \in K, \forall v \in V$. Beraz q ez da aplikazio lineala.*
- *(iii) v isotropoa da baldin eta soilik baldin $q(v) = 0$ bada.*

- *(iv) q positiboki definitua da baldin eta soilik baldin* $q(v) \geq 0$ *bada* $\forall v \in V$. *Era berean, q negatiboki definitua da baldin eta soilik baldin* $q(v) \leq 0$ *bada* $\forall v \in V$
- *(v)* $f(u,v) = \frac{q(u+v)-q(u)-q(v)}{2}, \forall u, v \in V$.
- *(vi) Izan bedi* $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ V*-ren oinarri ortogonala non:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

  Orduan $q(v) = \lambda_1^2 + ... + \lambda_r^2 - \lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2, \forall v \in V$. *Forma kuadratikoaren adierazpen hau* **karratuen bidezko adierazpena edo karratu independenteen adierazpena** *deitzen da.*

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan forma kuadratikoa $q(x,y,z) = x^2 + 2xz - y^2 + zy$ da $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}$.

Bestalde $\beta = \{e_1, e_2, (-1,1,1)\}$ f-rekiko oinarri ortogonala denez non $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ den. Orduan $q(x,y,z) = (x+z y-z z) M_\beta(f) \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \\ z \end{pmatrix} = (x+z)^2 - (y-z)^2$ da $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Eta azken hau da, karratu independenteen adierazpena.

■