3. Gaia 3

Matrize Triangeluargarri Baten Jordanen Forma Kanonikoa

Beraz $V^*(\lambda)$ azpiespazio propio orokortuan aurkitzen badugu oinarri bat non matrize elkartua Jordanen matrize bat den galderaren erantzuna lortuko genuke. Dakigunez, Jordanen matrizeak Jordanen blokeekin osatuak daude. Nolakoa izan behar du oinarri bat elkartutako matrizea Jordanen bloke bat izateko? Hurrengo teoremak ematen digu erantzuna.

Teorema 3.0.1. *Izan bedi $(a_1, ..., a_n) \in V^i(\lambda) - V^{i-1}(\lambda)$. Definitzen dugu hurrengo azpiespazioa K^n-n:*

$$W = \langle((A-\lambda I_n)^{i-1}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t, ((A-\lambda I_n)^{i-2}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t, \cdots, ((A-\lambda I_n)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t, (a_1, ..., a_n)\rangle$$

Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

- *(i)* $\{(((A-\lambda I_n)^{i-1}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t, ((A-\lambda I_n)^{i-2}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t, \cdots, ((A-\lambda I_n)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}, (a_1, ..., a_n))^t\}$ *W-ren oinarria da.*

- *(ii) Oinarri horretako bektoreak zutabeetan jarriz lortzen dugun matrize alderanzgarriari esker hurrengo matrizea lor genezake:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema 3.0.2. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ balio propio bakarra λ izanik, hau da $K^n = V^*(\lambda)$. Orduan existitzen da P matrize alderanzgarria, zutabeak* $\{((A - \lambda I_n)^{i-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})^t, ((A - \lambda I_n)^{i-2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})^t, \cdots, ((A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})^t, (a_1, ..., a_n)\}$ *moduko multzoekin osatuak non $P^{-1}AP$ Jordanen matrize bat den.*

Frogapena 3.0.3. *Oinarria eta Jordanen matrizea lortzeko metodoa emango dugu. Horretarako $V^*(\lambda) = V^j(\lambda)$ denez hurrengo taula eraikiko dugu:*

Dimentsioak	*Azpiespazioak*	*Oinarriko Bektoreak*
d_j	$V^j(\lambda)$	$v_{11}, ..., v_{1n_j}$
d_{j-1}	$V^{j-1}(\lambda)$	$((A-\lambda I_n)\cdot v_{11})^t, ..., ((A-\lambda I_n)\cdot v_{1n_j})^t, v_{21}, ..., v_{2n_{j-1}} \cdots$
d_{j-2}	$V^{j-2}(\lambda)$	$((A-\lambda I_n)^2\cdot v_{11})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^2\cdot v_{1n_j})^t, ((A-\lambda I_n)\cdot v_{21})^t, ..., ((A-\lambda I_n)\cdot v_{2n_{j-1}})^t \cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
d_2	$V^2(\lambda)$	$((A-\lambda I_n)^{j-2}\cdot v_{11})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^{j-2}\cdot v_{1n_j})^t, ((A-\lambda I_n)^{j-3}\cdot v_{21})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^{j-3}\cdot v_{2n_{j-1}})^t \cdots$
d_1	$V^1(\lambda)$	$((A-\lambda I_n)^{j-1}\cdot v_{11})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^{j-1}\cdot v_{1n_j})^t, ((A-\lambda I_n)^{j-2}\cdot v_{21})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^{j-2}\cdot v_{2n_{j-1}})^t \cdots$

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Kalkulatzen dugu A-ren polinomio karakteristikoa: $\chi_A(x) = (x-1)^6$. Orduan, aurreko teoremako egoeran gaude, hau da, A-k balio propio bakarra du. Beraz $\mathbb{R}^6 = V^*(1)$ da, hala ere, Jordanen matrizea eta oinarria lortzeko beharrezkoa ditugu nukleo guztiak:

1.- $V^1(1) = \langle (0,1,2,0,0,0), (0,0,0,1,2,0), (0,0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_1 = 3$ da.

2.- $V^2(1) = \langle (1,0,-3,0,0,0), (0,1,2,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_2 = 5$ da.

3.- $V^*(1) = V^3(1) = \mathbb{R}^6$ eta $d_3 = 6$ da.

(i) Alde batetik, dimentsioak erabiliz, Jordanen matrizea kalkulatuko dugu:

$$\begin{array}{lccl}
 & 0 & & \\
d_3 = 6 & & 1 & \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\
 & 1 & & \\
d_2 = 5 & & 1 & \text{bloke } 2 \times 2 \text{ ordenakoa} \\
 & 2 & & \\
d_1 = 3 & & 1 & \text{bloke } 1 \times 1 \text{ ordenakoa} \\
 & 3 & & \\
0 & & &
\end{array}$$

Beraz $J = \begin{pmatrix} J_3(1) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(1) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Bestetik P lortuko dugu hurrengo taularen bitartez:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 6$	$V^3(1)$	v_1
$d_2 = 5$	$V^2(1)$	$((A - I_6)(v_1))^t, v_2$
$d_1 = 3$	$V^1(1)$	$((A - I_6)^2(v_1))^t, ((A - I_6)(v_2))^t, v_3$

Orduan $((A-I_6)^2(v_1))^t, ((A-I_6)(v_1))^t, v_1, ((A-I_6)(v_2))^t, v_2, v_3$ bektoreak ordena honetan zutabeka jarriz lortzen den P matrize alderanzgarriarekin beteko da $P^{-1}AP = J$ dela.

Gainera:

(a) $v_1 \in V^3(1) - V^2(1)$.

(b) $v_2 \in V^2(1) - V(1)$ eta $((A-I_6)(v_1))^t, v_2$ linealki independenteak izan behar dira.

(c) $v_3 \in V(1)$ eta $((A-I_6)^2(v_1))^t, ((A-I_6)(v_2))^t, v_3$ linealki independenteak izan behar dira.

Adibidez $v_1 = (0,0,1,0,0,0)$ aukeratuz $((A-I_6)(v_1))^t = (1,1,-1,0,0,0)$ eta $((A-I_6)^2(v_1))^t = (0,1,2,0,0,0)$ dira. Orain $v_2 = (0,0,0,1,0,0)$ aukera daiteke eta orduan $((A-I_6)(v_2))^t = (0,0,0,2,4,0)$ da eta azkenik $v_3 = (0,0,0,0,0,1)$ aukera daiteke. Ondorioz:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Teorema 3.0.4. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ non $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)^{t_1} \cdots (x-\lambda_s)^{t_s}$ den, hau da, polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gorputzean daude. urreko teoremako metodoa erabiliz $V^*(\lambda_i)$ azpiespazioan $\beta_{V^*(\lambda_i)}$ oinarria lortzen badugu, $i = 1, ..., s$. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup \cdots \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ K^n-ren oinarria da eta oinarri horretako bektoreak behar bezala ordenatuz gero lortuko dugu P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP$ Jordanen matrizea den.*

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = (x-1)^2(x+1)$ denez erroak (balio propioak) 1 eta -1 dira. Orduan badakigu existitzen dela P matrize alderanzgarri bat non $P^{-1}AP = J$ Jordanen matrizea den.

(i) $V^*(1)$ azpiespazioa

Kalkuluak eginez lortzen ditugu hurrengo emaitzak:

$$V(1) = \langle (1,-2,2,-2) \rangle, V^2(1) = \langle (1,0,0,-2),(0,1,-1,0) \rangle$$

eta

$V^3(1) = \langle (1,0,0,-2),(0,1,0,0),(0,0,1,0) \rangle$

Orduan $V^*(1) = V^3(1)$ eta datu hauekin P matrizeko hiru zutabe eta J_1 lortu ahal ditugu:

1.- J_1 matrizea lortzeko hurrengoa egiten dugu:

$$\begin{array}{llll}
 & & 0 & & \\
d_3 = 3 & & & 1 & \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\
 & & 1 & & \\
d_2 = 2 & & & 0 & \\
 & & 1 & & \\
d_1 = 1 & & & 0 & \\
 & & 1 & & \\
 & 0 & & &
\end{array}$$

Beraz $J_1 = (J_3(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Zutabeak lortzeko:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 3$	$V^3(1)$	v
$d_2 = 2$	$V^2(1)$	$((A - I_4)(v))^t$
$d_1 = 1$	$V(1)$	$((A - I_4)^2(v))^t$

$v \in V^3(1) - V^2(1)$ izanik, adibidez $v = (0,1,0,0)$. Orduan $\beta_{V^*(1)} = \{(-1,2,-2,2),(0,-1,1,0),(0,1,0,0)\}$

(ii) $V^*(-1)$ azpiespazioa

Kalkulua eginez ondorengoa lortzen dugu $V^*(-1) = \langle (1,-1,1,-1) \rangle$. Orduan $J_2 = (-1)$ da eta $\beta_{V^*(-1)} = \{(1,-1,1,-1)\}$.

Beraz $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ espazioaren oinarria da eta

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Jordanen matrizea da.

∎