3. Gaia 2

Azpiespazio Orokortuak

Azpiespazio propio orokortuak definituko ditugu.

Definizioa 2.0.1. *Izan bedi λ A-ren balio propio bat. λ-ri elkartutako azpiespazio propio orokortua hurrengoa da:*

$$V^*(\lambda) = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \quad | \quad \exists i, (A - \lambda \cdot I_n)^i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Azpiespazio propio orokortuak zehazki kalkulatzeko hurrengo teorema behar dugu:

Teorema 2.0.2. *Izan bedi λ A-ren balio propioa. Orduan:*

(i) $V^*(\lambda) = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \quad | \quad (A - \lambda \cdot I_n)^j \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $j \in \{1, ..., m(\lambda)\}$ *baterako.*

(ii) $dimV^*(\lambda) = m(\lambda)$.

Hemendik aurrera $\{(x_1, ..., x_n) \in K^n \quad | \quad (A - \lambda \cdot I_n)^j \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$,
$j \in \{1, ..., m(\lambda)\}$

multzoa $V^j(\lambda)$ moduan adieraziko dugu. Ohartu $V(\lambda) = V^1(\lambda)$ betetzen dela beti.

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Orduan A-ren azpiespazio orkortuak lortu nahi baditugu:

(i) A-ren balio propioak kalkulatzen dira. $\chi_A(x) = (x-1)^3(x+1)$ denez A-ren balio propioak 1 eta -1 dira. Beraz bi azpiespazio propio orkortu daude.

(ii) $V^*(-1) = V(-1)$ da, dimentsioa 1 delako.

(iii) $V^*(1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \cdot I_3)^3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ da $dimV^1(1) = 1$ eta $dimV^2(1) = 2$ delako.

■

Oharrak 2.0.3. *1. Izan bedi $V^*(\lambda) = V^j(\lambda)$. Orduan froga daiteke hurrengo katea dugula:*

$$V(\lambda) \subseteq V^2(\lambda) \subseteq V^3(\lambda) \subseteq \cdots \subseteq V^{j-1}(\lambda) \subseteq V^*(\lambda)$$

eta partekotasun guztiak hertsiak dira, hau da, ez da berdintzarik ematen.

2.- $dimV(\lambda) = m(\lambda)$ denean $V^*(\lambda) = V(\lambda)$ betetzen da.

Teorema 2.0.4 (Deskonposaketa Primarioa)**.** *Izan bedi $A \in M_n(K)$ non $\chi_A(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean dauden. Hau da, $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_s)^{t_s}$ da , $\lambda_1, ..., \lambda_s \in K$ desberdinak izanik. Orduan:*

$$K^n = V^*(\lambda_1) \oplus V^*(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V^*(\lambda_s)$$

Oharra 2.0.5. *Aurreko teoremaren arabera. $\beta_{V^*(\lambda_1)}, ..., \beta_{V^*(\lambda_s)} V^*(\lambda_1), ..., V^*(\lambda_s)$ azpiespazioen oinarriak badira hurrenez-hurren. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup ... \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ K^n-ren oinarria da eta oinarri honetako bektoreak zutabeka jarriz lortzen dugun matrize alderanzgarriari esker A hurrengo motako matrize baten antzekoa da:*

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$