3. Gaia 3

Matrize Baten Jordanen Forma Kanonikoa

3.1 Sarrera. Matrize Antzekoak. Matrize Triangeluargarriak.

Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratua.Gogoratu matrize triangeluarrak bi motatakoak izan ahal direla: goi-triangeluarrak ($T = (a_{ij}), a_{ij} = 0 i > j$ denean) edo behe-triangeluarrak ($T = (a_{ij}), a_{ij} = 0 i < j$ denean).

Gai honetan hurrengo galdera egiten dugu: Existitzen al da P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP$ matrize triangeluarra den?

Matrizeen arteko erlazio bat definituko dugu.

Definizioa 3.1.1. *Izan bitez $A, B \in M_n(K)$. A eta B* **antzekoak** *direla esaten da baldin eta soilik baldin existitzen bada P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = B$ den.*

Ohartu endomorfismo batean elkartutako matrizeak $M_\beta(f)$ modukoak badira orduan matrize mota hauek antzekoak direla.

Planteiatu dugun galdera alda daiteke esanez: A matrizea matrize triangeluar baten antzekoa al da?

Definizioa 3.1.2. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrizea. A* `triangeluargarria` *dela esaten da baldin eta matrize triangeluar baten antzekoa bada.*

Gogoratu, aurreko gaian ikusi genuen bezala, matrize triangeluar baten antzekoa izatea eskatzen badugu bakarra izatearena galtzen dela eta horregatik behar ditugu matrize triangeluar zehatzakoak, Jordanen matrizeak. Gogoratu matrize hauek Jorden blokeekin osatuak daudela eta bloke hauek hurrengo itxura dute:

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$A \in M_n(K)$ bada, existitzen al da P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = J$ Jordanen matrizea den?

3.2 Azpiespazio Orokortuak

Azpiespazio propio orokortuak definituko ditugu.

Definizioa 3.2.1. *Izan bedi λ A-ren balio propio bat. λ-ri elkartutako azpiespazio propio orokortua hurrengoa da:*

$$V^*(\lambda) = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \quad | \quad \exists i, (A - \lambda \cdot I_n)^i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Azpiespazio propio orokortuak zehazki kalkulatzeko hurrengo teorema behar dugu:

Teorema 3.2.2. *Izan bedi λ A-ren balio propioa. Orduan:*

(i) $V^*(\lambda) = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \mid (A - \lambda \cdot I_n)^j \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $j \in \{1, ..., m(\lambda)\}$ *baterako.*

(ii) $dimV^*(\lambda) = m(\lambda)$.

Hemendik aurrera $\{(x_1, ..., x_n) \in K^n \mid (A - \lambda \cdot I_n)^j \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $j \in \{1, ..., m(\lambda)\}$ multzoa $V^j(\lambda)$ moduan adieraziko dugu. Ohartu $V(\lambda) = V^1(\lambda)$ betetzen dela beti.

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Orduan A-ren azpiespazio orkortuak lortu nahi baditugu:

(i) A-ren balio propioak kalkulatzen dira. $\chi_A(x) = (x-1)^3(x+1)$ denez A-ren balio propioak 1 eta -1 dira. Beraz bi azpiespazio propio orkortu daude.

(ii) $V^*(-1) = V(-1)$ da, dimentsioa 1 delako.

(iii) $V^*(1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \cdot I_3)^3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ da $dimV^1(1) = 1$ eta $dimV^2(1) = 2$ delako.

∎

Oharrak 3.2.3. *1. Izan bedi $V^*(\lambda) = V^j(\lambda)$. Orduan froga daiteke hurrengo katea dugula:*

$$V(\lambda) \subseteq V^2(\lambda) \subseteq V^3(\lambda) \subseteq \cdots \subseteq V^{j-1}(\lambda) \subseteq V^*(\lambda)$$

eta partekotasun guztiak hertsiak dira, hau da, ez da berdintzarik ematen.

2.- $dimV(\lambda) = m(\lambda)$ denean $V^*(\lambda) = V(\lambda)$ betetzen da.

Teorema 3.2.4 (Deskonposaketa Primarioa)**.** *Izan bedi $A \in M_n(K)$ non $\chi_A(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean dauden. Hau da, $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)^{t_1} \cdots (x-\lambda_s)^{t_s}$ da , $\lambda_1, ..., \lambda_s \in K$ desberdinak izanik. Orduan:*

$$K^n = V^*(\lambda_1) \oplus V^*(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V^*(\lambda_s)$$

Oharra 3.2.5. *Aurreko teoremaren arabera. $\beta_{V^*(\lambda_1)}, ..., \beta_{V^*(\lambda_s)} V^*(\lambda_1), ..., V^*(\lambda_s)$ azpiespazioen oinarriak badira hurrenez-hurren. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup ... \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ K^n-ren oinarria da eta oinarri honetako bektoreak zutabeka jarriz lortzen dugun matrize alderanzgarriari esker A hurrengo motako matrize baten antzekoa da:*

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

3.3 Matrize Triangeluargarri Baten Jordanen Forma Kanonikoa

Beraz $V^*(\lambda)$ azpiespazio propio orokortuan aurkitzen badugu oinarri bat non matrize elkartua Jordanen matrize bat den galderaren erantzuna lortuko genuke. Dakigunez, Jordanen matrizeak Jordanen blokeekin osatuak daude. Nolakoa izan behar du oinarri bat elkartutako matrizea Jordanen bloke bat izateko? Hurrengo teoremak ematen digu erantzuna.

Teorema 3.3.1. *Izan bedi $(a_1, ..., a_n) \in V^i(\lambda) - V^{i-1}(\lambda)$. Definitzen dugu hurrengo azpiespazioa K^n-n:*

$$W = \langle ((A-\lambda I_n)^{i-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})^t, ((A-\lambda I_n)^{i-2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})^t, \cdots, ((A-\lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})^t, (a_1, ..., a_n) \rangle$$

Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

- *(i)* $\{(((A-\lambda I_n)^{i-1}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t,((A-\lambda I_n)^{i-2}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t,\cdots,((A-\lambda I_n)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},(a_1,...,a_n))^t\}$ *W-ren oinarria da.*

- *(ii) Oinarri horretako bektoreak zutabeetan jarriz lortzen dugun matrize alderanzgarriari esker hurrengo matrizea lor genezake:*

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}$$

Teorema 3.3.2. *Izan bedi $A\in M_n(K)$ balio propio bakarra λ izanik, hau da $K^n=V^*(\lambda)$. Orduan existitzen da P matrize alderanzgarria, zutabeak* $\{((A-\lambda I_n)^{i-1}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t,((A-\lambda I_n)^{i-2}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t,\cdots,((A-\lambda I_n)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix})^t,(a_1,...,a_n)\}$ *moduko multzoekin osatuak non $P^{-1}AP$ Jordanen matrize bat den.*

Frogapena 3.3.3. *Oinarria eta Jordanen matrizea lortzeko metodoa emango dugu. Horretarako $V^*(\lambda)=V^j(\lambda)$ denez hurrengo taula eraikiko dugu:*

Dimentsioak	*Azpiespazioak*	*Oinarriko Bektoreak*
d_j	$V^j(\lambda)$	$v_{11}, ..., v_{1n_j}$
d_{j-1}	$V^{j-1}(\lambda)$	$((A-\lambda I_n)\cdot v_{11})^t, ..., ((A-\lambda I_n)\cdot v_{1n_j})^t, v_{21}, ..., v_{2n_{j-1}} \cdots$
d_{j-2}	$V^{j-2}(\lambda)$	$((A-\lambda I_n)^2\cdot v_{11})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^2\cdot v_{1n_j})^t, ((A-\lambda I_n)\cdot v_{21})^t, ..., ((A-\lambda I_n)\cdot v_{2n_{j-1}})^t \cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
d_2	$V^2(\lambda)$	$((A-\lambda I_n)^{j-2}\cdot v_{11})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^{j-2}\cdot v_{1n_j})^t, ((A-\lambda I_n)^{j-3}\cdot v_{21})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^{j-3}\cdot v_{2n_{j-1}})^t \cdots$
d_1	$V^1(\lambda)$	$((A-\lambda I_n)^{j-1}\cdot v_{11})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^{j-1}\cdot v_{1n_j})^t, ((A-\lambda I_n)^{j-2}\cdot v_{21})^t, ..., ((A-\lambda I_n)^{j-2}\cdot v_{2n_{j-1}})^t \cdots$

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Kalkulatzen dugu A-ren polinomio karakteristikoa: $\chi_A(x) = (x-1)^6$. Orduan, aurreko teoremako egoeran gaude, hau da, A-k balio propio bakarra du. Beraz $\mathbb{R}^6 = V^*(1)$ da, hala ere, Jordanen matrizea eta oinarria lortzeko beharrezkoa ditugu nukleo guztiak:

1.- $V^1(1) = \langle (0,1,2,0,0,0), (0,0,0,1,2,0), (0,0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_1 = 3$ da.

2.- $V^2(1) = \langle (1,0,-3,0,0,0), (0,1,2,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0),$
$(0,0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_2 = 5$ da.

3.- $V^*(1) = V^3(1) = \mathbb{R}^6$ eta $d_3 = 6$ da.

(i) Alde batetik, dimentsioak erabiliz, Jordanen matrizea kalkulatuko dugu:

$$\begin{array}{llll} & 0 & & \\ d_3 = 6 & & 1 & \text{bloke } 3\times 3 \text{ ordenakoa} \\ & 1 & & \\ d_2 = 5 & & 1 & \text{bloke } 2\times 2 \text{ ordenakoa} \\ & 2 & & \\ d_1 = 3 & & 1 & \text{bloke } 1\times 1 \text{ ordenakoa} \\ & 3 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Beraz $J = \begin{pmatrix} J_3(1) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(1) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Bestetik P lortuko dugu hurrengo taularen bitartez:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 6$	$V^3(1)$	v_1
$d_2 = 5$	$V^2(1)$	$((A - I_6)(v_1))^t, v_2$
$d_1 = 3$	$V^1(1)$	$((A - I_6)^2(v_1))^t, ((A - I_6)(v_2))^t, v_3$

Orduan $((A-I_6)^2(v_1))^t, ((A-I_6)(v_1))^t, v_1, ((A-I_6)(v_2))^t, v_2, v_3$ bektoreak ordena honetan zutabeka jarriz lortzen den P matrize alderanzgarriarekin beteko da $P^{-1}AP = J$ dela.

Gainera:

(a) $v_1 \in V^3(1) - V^2(1)$.

(b) $v_2 \in V^2(1) - V(1)$ eta $((A-I_6)(v_1))^t, v_2$ linealki independenteak izan behar dira.

(c) $v_3 \in V(1)$ eta $((A-I_6)^2(v_1))^t, ((A-I_6)(v_2))^t, v_3$ linealki independenteak izan behar dira.

Adibidez $v_1 = (0,0,1,0,0,0)$ aukeratuz $((A-I_6)(v_1))^t = (1,1,-1,0,0,0)$ eta $((A-I_6)^2(v_1))^t = (0,1,2,0,0,0)$ dira. Orain $v_2 = (0,0,0,1,0,0)$ aukera daiteke eta orduan $((A-I_6)(v_2))^t = (0,0,0,2,4,0)$ da eta azkenik $v_3 = (0,0,0,0,0,1)$ aukera daiteke. Ondorioz:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Teorema 3.3.4. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ non $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)^{t_1} \cdots (x-\lambda_s)^{t_s}$ den, hau da, polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gorputzean daude. urreko teoremako metodoa erabiliz $V^*(\lambda_i)$ azpiespazioan $\beta_{V^*(\lambda_i)}$ oinarria lortzen badugu, $i = 1, ..., s$. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup \cdots \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ K^n-ren oinarria da eta oinarri horretako bektoreak behar bezala ordenatuz gero lortuko dugu P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP$ Jordanen matrizea den.*

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = (x-1)^2(x+1)$ denez erroak (balio propioak) 1 eta -1 dira. Orduan badakigu existitzen dela P matrize alderanzgarri bat non $P^{-1}AP = J$ Jordanen matrizea den.

(i) $V^*(1)$ azpiespazioa

Kalkuluak eginez lortzen ditugu hurrengo emaitzak:

$$V(1) = \langle(1,-2,2,-2)\rangle, V^2(1) = \langle(1,0,0,-2),(0,1,-1,0)\rangle$$

eta

$V^3(1) = \langle(1,0,0,-2),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$

Orduan $V^*(1) = V^3(1)$ eta datu hauekin P matrizeko hiru zutabe eta J_1 lortu ahal ditugu:

1.- J_1 matrizea lortzeko hurrengoa egiten dugu:

	0		
$d_3 = 3$		1	bloke 3×3 ordenakoa
	1		
$d_2 = 2$		0	
	1		
$d_1 = 1$		0	
	1		
0			

Beraz $J_1 = (J_3(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Zutabeak lortzeko:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 3$	$V^3(1)$	v
$d_2 = 2$	$V^2(1)$	$((A - I_4)(v))^t$
$d_1 = 1$	$V(1)$	$((A - I_4)^2(v))^t$

$v \in V^3(1) - V^2(1)$ izanik, adibidez $v = (0,1,0,0)$. Orduan $\beta_{V^*(1)} = \{(-1,2,-2,2),(0,-1,1,0),(0,1,0,0)\}$

(ii) $V^*(-1)$ azpiespazioa

Kalkulua eginez ondorengoa lortzen dugu $V^*(-1) = \langle(1,-1,1,-1)\rangle$. Orduan $J_2 = (-1)$ da eta $\beta_{V^*(-1)} = \{(1,-1,1,-1)\}$.

Beraz $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ espazioaren oinarria da eta

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Jordanen matrizea da.}$$

■

3.4 Endomorfismo eta Matrize Baten Jordanen Forma Kanonikoaren Arteko Erlazioa

Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrizea. Matrize honekin $f \in End(K^n)$ endomorfismoa erahiki ahal da datu honekin: $M_{\beta_k}(f) = A$. Orduan:

(i) A-ren balio propioak eta f-renak berberak dira.

(ii) Azpiespazio orokortuak: endomorfismoen kasuan definitutako azpiespazio orokortua badugu: $V^*(\lambda) = \{v \in K^n \quad | \quad (f - \lambda 1_K^n)(v) = 0_{K^n}\}$. Orduan $v = (x_1, ..., x_n)$ moduan idatzi ahal da eta $M_{\beta_k}(f - \lambda 1_{K^n}) = (A - \lambda I_n)$ denez $(f - \lambda 1_K^n)(v) = 0_{K^n}$ idatzi edo $(A - \lambda I_n)(v) = 0_{M_n(K)}$ idatzi baliokidea da.

Ondorioz

f endomorfismoarentzat aurkitzen badugu β oinarri bat non $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea den orduan $A = M_{\beta_k}(f)$ eta J antzekoak dira eta antzekotasuna ematen duen P matrize alderanzgarria $M_\beta^{\beta_k}$ oinarri aldaketaren matrizea dugu.

3.5 Cayley-Hamiltonen Teorema

Gaia amaitzeko Cayley-Hamiltonen Teorema aurkezten dugu. Bertan esaten da $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrizea bere polinomio karakteristikoaren erroa dela. Frogapena lema desberdinetan banatuta dago

Lema 3.5.1. *Izan bedi $J_m(0)$ 0-ri elkartutako Jordanen m ordenako oinarrizko blokea. Orduan $\chi_{J_m(0)}(J_m(0)) = 0$ da.*

Lema 3.5.2. *Izan bedi $J_m(\lambda)$ λ-ri elkartutako Jordanen m ordenako oinarrizko blokea. Orduan $\chi_{J_m(\lambda)}(J_m(\lambda)) = 0$ da.*

Lema 3.5.3. *Izan bedi J Jordanen matrizea. Orduan $\chi_J(J) = 0$ da.*

Lema hauekin oso erraz frogatzen da hurrengo teorema.

Teorema 3.5.4 (Cayley-Hamilton-en Teorema)**.** *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{C})$. Orduan $\chi_A(A) = 0$ da.*

Frogapena. $A \in M_n(\mathbb{C})$ bada orduan bere polinomio karakteristikoaren erro guztiak (Aljebraren Oinarrizko Teorema) $\mathbb{C}$-n daude. Beraz A Jordanen matrize baten antzekoa da, hau da, existitzen da P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = J$ Jordanen matrizea den.

(i) Alde batetik, antzekotasuna dela eta, $\chi_A(x) = \chi_J(x)$ betetzen da.

(ii) Bestetik, $\chi_A(J) = \chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P$

Aurreko lemagatik $\chi_J(J) = \chi_A(J) = 0$ da beraz $\chi_A(A) = 0$ betetzen da.

■