2. Gaia 2

Endomorfismo Triangeluargarriak

Definizioa 2.0.1. *Izan bedi $f \in End(V)$. f* `triangeluargarria` *dela esaten da baldin eta existitzen bada β V-ren oinarri bat non $M_\beta(f)$ triangeluarra dan.*

Demagun f endomorfismo batentzat oinarri bat aurkitzen dugula, β, non $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ den. Orduan:

$$\chi_f(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$$

Beraz argi eta garbi, f-ren balio propio guztiak K gorputzean egongo dira eta baldintza hau ezinbestekoa da endomorfismo bat triangeluargarria izateko. Ohartu hau dela diagonalgarria izateko bete beharko duen baldintzetako bat.

Beraz diagonaleko elementuak f-ren balio proioak izango dira baina beste elementuak?. Azter dezagun hurrengo adibidea:

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^2)$ non $f(x, y) = (x + y, y), \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Orduan:

(i) β_k oinarri kanonikoa bada $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triangeluarra da.

(ii) $\beta = \{(1, 0), \lambda(1, 0)\}, \forall\lambda \in \mathbb{R}$, oinarria da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triangeluarra da.

Hau da elkartutako matrize triangeluarra ez da bakarra

Ikusten dugunez Sarreran planteiatutako galderan bakartasuna galtzen dugu. Arazo honengatik matrize triangeluar berezi batzuk definituko ditugu: Jordanen matrizeak. Matrize hauek Jordanen blokeekin osatuta daude.

Definizioa 2.0.2. *Izan bitez $\lambda \in K$ eta $r \geq 1$. Jordanen bloke bat hurrengo erako matrize bat da:*

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Adibidea. $J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ eta $J_1(0) = (\,0\,)$

Jordanen blokeak dira denak.

■

Definizioa 2.0.3. *Matrize bat, J,* **Jordanen Matrizea** *dela esaten da blokeka diagonala bada eta bloke bakoitza Jordanen bloke bar bada. Hau da:*

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{r_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Adibidea. $\begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Jordanen matrizea da.

■

Oharrak 2.0.4. *(i) Jordanen matrizeak triangeluarrak dira.*

(ii) Matrize diagonalak Jordanen matrizeak ere badira:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_1(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Orduan hurrengo galdera dugu:

$f \in End(V)$ bada, existitzen al da β V-ren oinarri bat non $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea den?

Horretan sartu baino lehen ikus ditzagun aurrerantzean garrantsizkoak izango diren endomorfismo eta matrizeen polinomioak.

Izan bedi $f \in End(V)$ orduan:

(i) $f^i = f \circ f \cdots \circ f$ ere endomorfismoa da.

(ii) f eta g endomorfismoa badira $f + g$ ere endomorfismoa da.

(iii) $\lambda \in K$ bada λf ere endomorfismoa da.

Honela bada hurrengo definizioa dugu.

Definizioa 2.0.5. *Izan bitez f endomorfismoa eta $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in K[x]$. Orduan $p(f)$ hurrengo endomorfismoa da:*

$$p(f) = a_0 1_V + a_1 f + ... + a_n f^n$$

Adibidea. Izan bitez $f \in End(\mathbb{R}^2)$ non $f(x, y) = (x + y, y)$ den eta $p(x) = x^2 + 1$ polinomioa. Orduan $p(f) = 1_{\mathbb{R}^2} + f^2$ dugu non:

$$p(f)(x, y) = (1_{\mathbb{R}^2} + f^2)(x, y) = (x, y) + (x + 2y, y) = (2x + 3y, 2y)$$

■

Era berean definitzen ditugu matrizeen polinomioak.

Definizioa 2.0.6. *Izan bitez* $A \in M_n(K)$ *eta* $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ *polinomioa. Orduan* $p(A)$ *hurrengo matrizea da:*

$$p(A) = a_0 \cdot I_n + a_1A + ... + a_nA^n$$

Adibidea. Izan bitez $f \in End(\mathbb{R}^2)$ non $f(x, y) = (x + y, y)$ den eta $p(x) = x^2 + 1$ polinomioa. $A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bada orduan $p(A) = I_2 + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ da. Ohartu $M_{\beta_k}(p(f)) = p(A)$ betetzen dela.

■

Teorema 2.0.7. *Izan bitez* $f \in End(V)$ *eta* β V*-ren oinarria.*

(i) $A = M_\beta(f)$ *bada orduan* $p(A) = M_\beta(p(f))$ *da,* $p(x)$ *edozein polinomioarentzat.*

(ii) $(p + q)(f) = p(f) + q(f)$ *(era berean matrizeekin)*

(iii) $(\lambda p)(f) = \lambda p(f)$ *(era berean matrizeekin)*

(iv) $(p.q)(f) = p(f) \circ q(f)$ *(matrizeen kasuan antzekoa baina biderketarekin)*

Ohartu $p(f)$ moduko endomorfismoak (eta $p(A)$ moduko matrizeak) propietate trukakorra betezen dutela.

Teorema 2.0.8. *Izan bitez* $f \in End(V)$ *eta* $p(x)$ *polinomioa. Orduan* $Kerp(f)$ f*-aldagaitza da, hau da,* $f(Kerp(f)) \leq Kerp(f)$ *betetzen da.*

Beraz $V^*(\lambda)$ azpiespazio propio orokortuak f-aldagaitzak dira. Gainera hurrengo emaitza garratzitsua dugu.

Teorema 2.0.9. *Izan bitez* $f \in End(V)$ *eta* $p_1, ..., p_n$ *binaka elkarrekiko lehenak diren polinomioak. Orduan* $Kerp_1(f)$*,...,*$Kerp_n(f)$ *azpiespazioen batura zuzena da.*