2. Gaia 4

Endormorfismo Triangeluargarri Baten Jordanen Forma Kanonikoa

Dakigunez, Jordanen matrizeak Jordanen blokeekin osatuak daude. Nolakoa izan behar du oinarri bat elkartutako matrizea Jordanen bloke bat izateko? Hurrengo teoremak ematen digu erantzuna.

Ikus dezagun Jordanen bloke bat lortzen ze motatako oinarrik erabili behar ditugun.

Teorema 4.0.1. *Izan bedi* $v \in Ker(f - \lambda 1_V)^i - Ker(f - \lambda 1_V)^{i-1}$. *Definitzen dugu hurrengo azpiespazioa:*

$$W = \langle (f - \lambda 1_V)^{i-1}(v), (f - \lambda 1_V)^{i-2}(v), \cdots, (f - \lambda 1_V)(v), v \rangle$$

Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

- *(i)* W f*-aldagaitza da.*
- *(ii)* $\{(f-\lambda 1_V)^{i-1}(v), (f-\lambda 1_V)^{i-2}(v), \cdots, (f-\lambda 1_V)(v), v\}$ W*-ren oinarria da.*

- *(iii) $f|W$ aplikazioari elkartutako matrizea aurreko oinarriarekiko hurrengoa da:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Frogapena 4.0.2. *Demagun $\{(f-\lambda 1_V)^{i-1}(v), (f-\lambda 1_V)^{i-2}(v), \cdots, (f-\lambda 1_V)(v), v\}$ W-ren oinarria dela. orduan:*

- *(i) $f((f-\lambda 1_V)^{i-1}(v)) = (f-\lambda 1_V + \lambda 1_V)((f-\lambda 1_V)^{i-1}(v)) = \lambda(f-\lambda 1_V)^{i-1}(v) \in W$*
- *(ii) $f((f-\lambda 1_V)^{i-2}(v)) = (f-\lambda 1_V + \lambda 1_V)((f-\lambda 1_V)^{i-2}(v)) = (f-\lambda 1_V)^{i-1}(v) + \lambda(f-\lambda 1_V)^{i-2}(v) \in W$*
- *(iii) $f((f-\lambda 1_V)^{i-3}(v)) = (f-\lambda 1_V + \lambda 1_V)((f-\lambda 1_V)^{i-3}(v)) = (f-\lambda 1_V)^{i-2}(v) + \lambda(f-\lambda 1_V)^{i-3}(v) \in W$*

Era berean eginez oinarriko beste bektoreekin frogatzen ditugu (i) eta (iii) atalak

Teorema 4.0.3. *Izan bedi $f \in End(V)$ balio propio bakarra λ izanik, hau da $V = V^*(\lambda)$. Orduan existitzen da V-n oinarri bat, β, $\{(f-\lambda 1_V)^{i-1}(v), (f-\lambda 1_V)^{i-2}(v), \cdots, (f-\lambda 1_V)(v), v\}$ moduko multzoen bildura bat dena non $M_\beta(f)$ J Jordanen matrize bat den.*

Frogapena 4.0.4. *Oinarria eta Jordanen matrizea lortzeko metodoa emango dugu. Horretarako $V^*(\lambda) = Ker(f-\lambda 1_V)^j$ denez hurrengo taula eraikiko dugu:*

Dimentsioak	*Azpiespazioak*	*Oinarriko Bektoreak*
d_j	$Ker(f-\lambda 1_V)^j$	$v_{11},...,v_{1n_j}$
d_{j-1}	$Ker(f-\lambda 1_V)^{j-1}$	$(f-\lambda 1_V)(v_{11}),...,(f-\lambda 1_V)(v_{1n_j}),v_{21},...,v_{2n_{j-1}}\cdots$
d_{j-2}	$Ker(f-\lambda 1_V)^{j-2}$	$(f-\lambda 1_V)^2(v_{11}),...,(f-\lambda 1_V)^2(v_{1n_j}),(f-\lambda 1_V)(v_{21}),...,(f-\lambda 1_V)(v_{2n_{j-1}})\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
d_2	$Ker(f-\lambda 1_V)^2$	$(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{11}),...,(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{1n_j}),(f-\lambda 1_V)^{j-3}(v_{21}),...,(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{2n_{j-1}})\cdots$
d_1	$Ker(f-\lambda 1_V)$	$(f-\lambda 1_V)^{j-1}(v_{11}),...,(f-\lambda 1_V)^{j-1}(v_{1n_j}),(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{21}),...,(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{2n_{j-1}})\cdots$

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^6)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kalkulatzen dugu f-ren polinomio karakteristikoa: $\chi_f(x) = (x-1)^6$. Orduan, aurreko teoremako egoeran gaude, hau da, f-k balio propio bakarra du. Beraz $\mathbb{R}^6 = V^*(1)$ da, hala ere, Jordanen matrizea eta oinarria lortzeko beharrezkoa ditugu nukleo guztiak:

1.- $Ker(f - 1_{\mathbb{R}^6}) = \langle (0,1,2,0,0,0), (0,0,0,1,2,0), (0,0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_1 = 3$ da.

2.- $Ker(f - 1_{\mathbb{R}^6})^2 = \langle (1,0,-3,0,0,0), (0,1,2,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0),$

$(0,0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_2 = 5$ da.

3.- $V^*(1) = Ker(f - 1_{\mathbb{R}^6})^3 = \mathbb{R}^6$ eta $d_3 = 6$ da.

(i) Alde batetik, dimentsioak erabiliz, Jordanen matrizea kalkulatuko dugu:

$$\begin{array}{llll} & 0 & & \\ d_3 = 6 & & 1 & \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\ & 1 & & \\ d_2 = 5 & & 1 & \text{bloke } 2 \times 2 \text{ ordenakoa} \\ & 2 & & \\ d_1 = 3 & & 1 & \text{bloke } 1 \times 1 \text{ ordenakoa} \\ & 3 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Beraz $J = \begin{pmatrix} J_3(1) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(1) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Bestetik oinarria lortuko dugu hurrengo taularen bitartez:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 6$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^3$	v_1
$d_2 = 5$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_2$
$d_1 = 3$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_3$

Orduan $\beta = \{(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_1, (f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_2, v_3\}$ da behar dugun oinarria (ordena honetan).

Gainera:

(a) $v_1 \in Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^3 - Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2$.

(b) $v_2 \in Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2 - Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})$ eta $(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_2$ linealki independenteak izan behar dira.

(c) $v_3 \in Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})$ eta $(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_3$ linealki independenteak izan behar dira.

Adibidez $v_1 = (0,0,1,0,0,0)$ aukeratuz $(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_1) = (1,1,-1,0,0,0)$ eta $f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2(v_1) = (0,1,2,0,0,0)$ dira. Orain $v_2 = (0,0,0,1,0,0)$ aukera daiteke eta orduan $(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_2) = (0,0,0,2,4,0)$ da eta azkenik $v_3 = (0,0,0,0,0,1)$ aukera daiteke. Ondorioz:

$\beta = \{(0,1,2,0,0,0), (1,1,-1,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,2,4,0), (0,0,0,1,0,0),$

$(0,0,0,0,0,1)\}$ da bilatzen genuen oinarria non $M_\beta(f) = J$ den.

■

Teorema 4.0.5. *Izan bedi $f \in End(V)$ non $\chi_f(x) = (x-\lambda_1)^{t_1} \cdots (x-\lambda_s)^{t_s}$ den, hau da, polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gorputzean daude. urreko teoremako metodoa erabiliz $V^*(\lambda_i)$ azpiespazioan $\beta_{V^*(\lambda_i)}$ oinarria lortzen badugu, $i = 1, ..., s$. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup \cdots \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ V-ren oinarria da eta $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea da.*

Frogapena 4.0.6. *Ohartu $V = V^*(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V^*(\lambda_s)$ dela eta $V^*(\lambda_i)$ azpiespazio f-aldagaitza da $i = 1, ..., s$.*

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^4)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Dakigunez $\chi_f(x) = (x-1)^3(x+1)$ da eta balio propioak: $1, -1$ gorputzean daude. Beraz aurkitu daiteke β oinarri bat non $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea den. Gainera $\beta = \beta_{V^*(1)} \cup \beta_{V^*(-1)}$ eta $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$. Hau da, azpiespazio orokortu bakoitzean oinarri bat eta Jordanen matrize bat lortu behar ditugu.

(i) $V^*(1)$ azpiespazioa

Kalkuluak eginez lortzen ditugu hurrengo emaitzak:

$$Ker(f - 1_{\mathbb{R}^4}) = \langle(1,-2,2,-2)\rangle, Ker(f - 1_{\mathbb{R}^4})^2 = \langle(1,0,0,-2),(0,1,-1,0)\rangle$$

eta

$Ker(f - 1_{\mathbb{R}^4})^3 = \langle(1,0,0,-2),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$

Orduan $V^*(1) = Ker(f - 1_{\mathbb{R}^4})$ eta datu hauekin $\beta_{V^*(1)}$ eta J_1 lortu ahal ditugu:

1.- J_1 matrizea lortzeko hurrengoa egiten dugu:

$$\begin{array}{lccl}
 & 0 & & \\
d_3 = 3 & & 1 & \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\
 & 1 & & \\
d_2 = 2 & & 0 & \\
 & 1 & & \\
d_1 = 1 & & 0 & \\
 & 1 & & \\
0 & & &
\end{array}$$

Beraz $J_1 = (J_3(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.- $\beta_{V^*(1)}$ lortzeko hurrengo taularen bitartez egingo dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 3$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^3$	v
$d_2 = 2$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})(v)$
$d_1 = 1$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2(v)$

$v \in KerKer(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^3 - Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2$ izanik, adibidez $v = (0,1,0,0)$. Orduan $\beta_{V^*(1)} = \{(-1,2,-2,2),(0,-1,1,0),(0,1,0,0)\}$

(ii) $V^*(-1)$ azpiespazioa

Kalkulua eginez ondorengoa lortzen dugu $V^*(-1) = Ke(f+1_{\mathbb{R}^4}) = \langle(1,-1,1,-1)\rangle$. Orduan $J_2 = (-1)$ da eta $\beta_{V^*(-1)} = \{(1,-1,1,-1)\}$.

Beraz $\beta = \{(-1,2,-2,2),(0,-1,1,0),(0,1,0,0),(1,-1,1,-1)$ $\mathbb{R}^4$ espazioaren oinarria da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Jordanen matrizea da.

■

Ondorioa 4.0.7. *Izan bedi $f \in End(V)$. Orduan existitzen da β V-ren oinarria non $M_\beta(f)$ Jordanen matrizea den baldin eta soilik baldin $\chi_f(x)$ polinomioaren erro guztiak K gorputzean badaude.*