2. Gaia 3

Azpiespazio Propio Orokortuak

Azpiespazio propio orokortuak definituko ditugu.

Definizioa 3.0.1. *Izan bedi λ f-ren balio propio bat. λ-ri elkartutako azpiespazio propio orokortua hurrengoa da:*

$$V^*(\lambda) = \{v \in V \quad | \quad \exists i, (f - \lambda \cdot 1_V)^i(v) = 0\}.$$

Ohartu hurrengo katea dugula:

$$V(\lambda) = Ker(f - \lambda \cdot 1_V) \subseteq Ker(f - \lambda \cdot 1_V)^2 \subseteq \cdots \subseteq V^*(\lambda)$$

Azpiespazio propio orokortuak zehazki kalkulatzeko hurrengo teorema behar dugu:

Teorema 3.0.2. *Izan bedi λ f-ren balio propioa. Orduan $dimV^*(\lambda) = m(\lambda)$ da.*

Teorema 3.0.3. *Izan bedi λ f-ren balio propioa. Orduan:*

$V^*(\lambda) = Ker(f - \lambda \cdot 1_V)^j, j \in \{1, ..., m(\lambda)\}$ *baterako.*

Frogapena. (i) Ikusi dugunez:

$$V(\lambda) = Ker(f - \lambda \cdot 1_V) \subseteq Ker(f - \lambda \cdot 1_V)^2 \subseteq Ker(f - \lambda \cdot 1_V)^3 \subseteq \cdots ... \subseteq V^*(\lambda)$$

Ezinezkoa da azpiespazio guztiak desberdinak izatea. Bestela $dimKer(f - \lambda \cdot 1_V) \geq 1$ (λ balio propioa baita), $dimKer(f - \lambda \cdot 1_V)^2 \geq 2$,

$dimKer(f-\lambda\cdot 1_V)^3 \geq 3$....eta horrela $dimV^*(\lambda) > m(\lambda)$ eta hau ez da posible. Beraz, katean, momenturen batean berditza ematen da, hau da, existitzen da j non $Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j = Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^{j+1}$ den.

Froga dezagun $V^*(\lambda) = Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j$ dela j aurreko berdintza betetzen duen txikiena izanik.

Partekotasun bat berehalakoa da. Bestea frogatzeko, demagun $v \in Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^i$ betetzen dela, i txikiena izanik. Bi kasu bereizten ditugu:

(i) $i \leq j$ bada. Orduan $v \in Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^i \subseteq Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j$ eta frogatuta dago.

(ii) $i > j$ bada. Orduan $(f-\lambda\cdot 1_V)^i(v) = 0_V$ idatzi ahal dugu modu honetan $(f-\lambda\cdot 1_V)^{j+1}((f-\lambda\cdot 1_V)^{i-j-1}(v)) = 0_V$. Beraz $(f-\lambda\cdot 1_V)^{i-j-1}(v) \in Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^{j+1} = Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j$. Ondorioz $(f-\lambda\cdot 1_V)^{i-j-1}(v) \in Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j$ eta beraz $(f-\lambda\cdot 1_V)^{i-1}(v) = 0_V$ eta hau ezinezkoa da. ■

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^4)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Orduan f-ren azpiespazio orkortuak lortu nahi baditugu:

(i) f-ren balio propioak kalkulatzen dira. $\chi_f(x) = (x-1)^3(x+1)$ denez f-ren balio propioak 1 eta -1 dira. Beraz bi azpiespazio propio orkortu daude.

(ii) $V^*(-1) = V(-1)$ da, dimentsioa 1 delako.

(iii) $V^*(1) = Ker(f-1_{\mathbb{R}^4})^3$ da $\dim Ker(f-1_{\mathbb{R}^4}) = 1$ eta $\dim Ker(f-1_{\mathbb{R}^4})^2 = 2$ direlako.

■

Oharrak 3.0.4. *1.- Gogoratu $V^*(\lambda) = Ker(f-\lambda 1_V)^j$ azpiespazio f-aldagaitza da.*

2.- $dimV(\lambda) = m(\lambda)$ denean $V^*(\lambda) = V(\lambda)$ betetzen da.

Teorema 3.0.5 (Deskonposaketa Primarioa)**.** *Izan bedi* $f \in End(V)$ *non* $\chi_f(x)$ *polinomioaren erro guztiak* K *gainean dauden. Hau da,* $\chi_f(x) = (x-\lambda_1)^{t_1} \cdots (x-\lambda_s)^{t_s}$ *da ,* $\lambda_1, ..., \lambda_s \in K$ *desberdinak izanik. Orduan:*

$$V = V^*(\lambda_1) \oplus V^*(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V^*(\lambda_s)$$

Oharra 3.0.6. *Aurreko teoremaren arabera.* $\beta_{V^*(\lambda_1)}, ..., \beta_{V^*(\lambda_s)} V^*(\lambda_1), ..., V^*(\lambda_s)$ *azpiespazioen oinarriak badira hurrenez-hurren. Orduan* $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup ... \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ V*-ren oinarria da eta matrize elkartua blokeka diagonala da:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

Gainera $B_i = M_{\beta_{V^*(\lambda_i)}}(f|V^*(\lambda_i))$ *da* $i = 1, ..., s$.

Beraz $V^*(\lambda)$ azpiespazio propio orokortuan aurkitzen badugu oinarri bat non matrize elkartua Jordanen matrize bat den galderaren erantzuna lortuko genuke.