2. Gaia 2

Endomorfismoen Jordanen Forma Kanonikoa

2.1 Sarrera

Izan bedi V dimentsio finituko K-espazio bektoriala. f V gaineko endomorfismoa. Dakigunez f diagonalgarria da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen baditu:

(i) $\chi_f(x)$ polinomioaren erroak K gainean daude.

(ii) λ f-ren balio propioa bada: $\dim V(\lambda) = m(\lambda)$.

Ikusten den bezala (ii) baldintza oso gogorra da eta horregatik beste irtenbide batzuk bilatzen saiatuko gara. Hurrengo galdera izan daiteke bat:

Existitzen al da β V-ren oinarri bat non $M_\beta^\beta(f)$ matrize elkartua triangeluarra den?

Definizioa 2.1.1. *Izan bedi $A \in M_n K$ matrizea.*

(i) A `goi-triangeluarra` *dela esaten da baldin eta A matrizean diagonal naguasiaren azpitik dauden elementu guztiak 0 badira. Hau da:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(ii) A `behe-triangeluarra` *dela esaten da baldin eta A matrizean diagonal naguasiaren gainetik dauden elementu guztiak 0 badira. Hau da:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Edoizein kasutan A `triangeluarra` *dela esaten da.*

Ohartu ezaguna dela $f : V \to V$ aplikazio lineala bada existitzen direla bi oinarriak β eta β' non:

$$M_{\beta}^{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lortutako matrizea triangeluarra da baina gai honetan eskatzen dugu gainera eremuko eta helburu-multzoko oinarria berbera izatea eta hau aurreko teoremak ez digu zihurtatzen.

2.2 Endomorfismo Triangeluargarriak

Definizioa 2.2.1. *Izan bedi $f \in End(V)$. f* `triangeluargarria` *dela esaten da baldin eta existitzen bada β V-ren oinarri bat non $M_\beta(f)$ triangeluarra dan.*

Demagun f endomorfismo batentzat oinarri bat aurkitzen dugula, β, non $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ den. Orduan:

$$\chi_f(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$$

Beraz argi eta garbi, f-ren balio propio guztiak K gorputzean egongo dira eta baldintza hau ezinbestekoa da endomorfismo bat triangeluargarria izateko. Ohartu hau dela diagonalgarria izateko bete beharko duen baldintzetako bat.

Beraz diagonaleko elementuak f-ren balio proioak izango dira baina beste elementuak?. Azter dezagun hurrengo adibidea:

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^2)$ non $f(x,y) = (x+y, y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Orduan:

(i) β_k oinarri kanonikoa bada $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triangeluarra da.

(ii) $\beta = \{(1,0), \lambda(1,0)\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, oinarria da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triangeluarra da.

Hau da elkartutako matrize triangeluarra ez da bakarra

■

Ikusten dugunez Sarreran planteiatutako galderan bakartasuna galtzen dugu. Arazo honengatik matrize triangeluar berezi batzuk definituko ditugu: Jordanen matrizeak. Matrize hauek Jordanen blokeekin osatuta daude.

Definizioa 2.2.2. *Izan bitez $\lambda \in K$ eta $r \geq 1$. Jordanen bloke bat hurrengo erako matrize bat da:*

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Adibidea. $J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ eta $J_1(0) = (\,0\,)$

Jordanen blokeak dira denak.

■

Definizioa 2.2.3. *Matrize bat, J,* **Jordanen Matrizea** *dela esaten da blokeka diagonala bada eta bloke bakoitza Jordanen bloke bar bada. Hau da:*

$$J=\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{r_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Adibidea. $\begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Jordanen matrizea da.

■

Oharrak 2.2.4. *(i) Jordanen matrizeak triangeluarrak dira.*

(ii) Matrize diagonalak Jordanen matrizeak ere badira:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_1(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Orduan hurrengo galdera dugu:

$f \in End(V)$ bada, existitzen al da β V-ren oinarri bat non $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea den?

Horretan sartu baino lehen ikus ditzagun aurrerantzean garrantzizkoak izango diren endomorfismo eta matrizeen polinomioak.

Izan bedi $f \in End(V)$ orduan:

(i) $f^i = f \circ f \cdots \circ f$ ere endomorfismoa da.

(ii) f eta g endomorfismoa badira $f + g$ ere endomorfismoa da.

(iii) $\lambda \in K$ bada λf ere endomorfismoa da.

Honela bada hurrengo definizioa dugu.

Definizioa 2.2.5. *Izan bitez f endomorfismoa eta $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in K[x]$. Orduan $p(f)$ hurrengo endomorfismoa da:*

$$p(f) = a_0 1_V + a_1 f + ... + a_n f^n$$

Adibidea. Izan bitez $f \in End(\mathbb{R}^2)$ non $f(x,y) = (x+y,y)$ den eta $p(x) = x^2+1$ polinomioa. Orduan $p(f) = 1_{\mathbb{R}^2} + f^2$ dugu non:

$$p(f)(x,y) = (1_{\mathbb{R}^2} + f^2)(x,y) = (x,y) + (x+2y,y) = (2x+3y,2y)$$

■

Era berean definitzen ditugu matrizeen polinomioak.

Definizioa 2.2.6. *Izan bitez $A \in M_n(K)$ eta $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ polinomioa. Orduan $p(A)$ hurrengo matrizea da:*

$$p(A) = a_0 \cdot I_n + a_1 A + ... + a_n A^n$$

Adibidea. Izan bitez $f \in End(\mathbb{R}^2)$ non $f(x,y) = (x+y,y)$ den eta $p(x) = x^2+1$ polinomioa. $A = M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bada orduan $p(A) = I_2 + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ da. Ohartu $M_{\beta_k}(p(f)) = p(A)$ betetzen dela.

■

Teorema 2.2.7. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta β V-ren oinarria.*

(i) $A = M_\beta(f)$ bada orduan $p(A) = M_\beta(p(f))$ da, $p(x)$ edozein polinomioarentzat.

(ii) $(p+q)(f) = p(f) + q(f)$ (era berean matrizeekin)

(iii) $(\lambda p)(f) = \lambda p(f)$ (era berean matrizeekin)

(iv) $(p.q)(f) = p(f) \circ q(f)$ (matrizeen kasuan antzekoa baina biderketarekin)

Ohartu $p(f)$ moduko endomorfismoak (eta $p(A)$ moduko matrizeak) propietate trukakorra betezen dutela.

Teorema 2.2.8. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta $p(x)$ polinomioa. Orduan $Kerp(f)$ f-aldagaitza da, hau da, $f(Kerp(f)) \leq Kerp(f)$ betetzen da.*

Beraz $V^*(\lambda)$ azpiespazio propio orokortuak f-aldagaitzak dira. Gainera hurrengo emaitza garratzitsua dugu.

Teorema 2.2.9. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta $p_1, ..., p_n$ binaka elkarrekiko lehenak diren polinomioak. Orduan $Kerp_1(f)$,...,$Kerp_n(f)$ azpiespazioen batura zuzena da.*

2.3 Azpiespazio Propio Orokortuak

Azpiespazio propio orokortuak definituko ditugu.

Definizioa 2.3.1. *Izan bedi λ f-ren balio propio bat. λ-ri elkartutako azpiespazio propio orokortua hurrengoa da:*

$$V^*(\lambda) = \{v \in V \quad | \quad \exists i, (f - \lambda \cdot 1_V)^i(v) = 0\}.$$

Ohartu hurrengo katea dugula:

$$V(\lambda) = Ker(f - \lambda \cdot 1_V) \subseteq Ker(f - \lambda \cdot 1_V)^2 \subseteq \cdots \subseteq V^*(\lambda)$$

Azpiespazio propio orokortuak zehazki kalkulatzeko hurrengo teorema behar dugu:

Teorema 2.3.2. *Izan bedi λ f-ren balio propioa. Orduan $dimV^*(\lambda) = m(\lambda)$ da.*

Teorema 2.3.3. *Izan bedi λ f-ren balio propioa. Orduan:*

$V^*(\lambda) = Ker(f - \lambda \cdot 1_V)^j, j \in \{1, ..., m(\lambda)\}$ *baterako.*

Frogapena. (i) Ikusi dugunez:

$$V(\lambda) = Ker(f-\lambda\cdot 1_V) \subseteq Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^2 \subseteq Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^3 \subseteq \cdots ... \subseteq V^*(\lambda)$$

Ezinezkoa da azpiespazio guztiak desberdinak izatea. Bestela $dimKer(f - \lambda \cdot 1_V) \geq 1$ (λ balio propioa baita), $dimKer(f - \lambda \cdot 1_V)^2 \geq 2$,

$dimKer(f-\lambda\cdot 1_V)^3 \geq 3$....eta horrela $dimV^*(\lambda) > m(\lambda)$ eta hau ez da posible. Beraz, katean, momenturen batean berditza ematen da, hau da, existitzen da j non $Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j = Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^{j+1}$ den.

Froga dezagun $V^*(\lambda) = Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j$ dela j aurreko berdintza betetzen duen txikiena izanik.

Partekotasun bat berehalakoa da. Bestea frogatzeko, demagun $v \in Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^i$ betetzen dela, i txikiena izanik. Bi kasu bereizten ditugu:

(i) $i \leq j$ bada. Orduan $v \in Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^i \subseteq Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j$ eta frogatuta dago.

(ii) $i > j$ bada. Orduan $(f-\lambda\cdot 1_V)^i(v) = 0_V$ idatzi ahal dugu modu honetan $(f-\lambda\cdot 1_V)^{j+1}((f-\lambda\cdot 1_V)^{i-j-1}(v)) = 0_V$. Beraz $(f-\lambda\cdot 1_V)^{i-j-1}(v) \in Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^{j+1} = Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j$. Ondorioz $(f-\lambda\cdot 1_V)^{i-j-1}(v) \in Ker(f-\lambda\cdot 1_V)^j$ eta beraz $(f-\lambda\cdot 1_V)^{i-1}(v) = 0_V$ eta hau ezinezkoa da. ■

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^4)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Orduan f-ren azpiespazio orkortuak lortu nahi baditugu:

(i) f-ren balio propioak kalkulatzen dira. $\chi_f(x) = (x-1)^3(x+1)$ denez f-ren balio propioak 1 eta -1 dira. Beraz bi azpiespazio propio orkortu daude.

(ii) $V^*(-1) = V(-1)$ da, dimentsioa 1 delako.

(iii) $V^*(1) = Ker(f-1_{\mathbb{R}^4})^3$ da $\dim Ker(f-1_{\mathbb{R}^4}) = 1$ eta $\dim Ker(f-1_{\mathbb{R}^4})^2 = 2$ direlako.

■

Oharrak 2.3.4. *1.- Gogoratu $V^*(\lambda) = Ker(f-\lambda 1_V)^j$ azpiespazio f-aldagaitza da.*

2.- $dimV(\lambda) = m(\lambda)$ denean $V^*(\lambda) = V(\lambda)$ betetzen da.

Teorema 2.3.5 (Deskonposaketa Primarioa)**.** *Izan bedi $f \in End(V)$ non $\chi_f(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean dauden. Hau da, $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_s)^{t_s}$ da , $\lambda_1, ..., \lambda_s \in K$ desberdinak izanik. Orduan:*

$$V = V^*(\lambda_1) \oplus V^*(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V^*(\lambda_s)$$

Oharra 2.3.6. *Aurreko teoremaren arabera. $\beta_{V^*(\lambda_1)}, ..., \beta_{V^*(\lambda_s)} V^*(\lambda_1), ..., V^*(\lambda_s)$ azpiespazioen oinarriak badira hurrenez-hurren. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup ... \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ V-ren oinarria da eta matrize elkartua blokeka diagonala da:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

Gainera $B_i = M_{\beta_{V^*(\lambda_i)}}(f|V^*(\lambda_i))$ da $i = 1, ..., s$.

Beraz $V^*(\lambda)$ azpiespazio propio orokortuan aurkitzen badugu oinarri bat non matrize elkartua Jordanen matrize bat den galderaren erantzuna lortuko genuke.

2.4 Endormorfismo Triangeluargarri Baten Jordanen Forma Kanonikoa

Dakigunez, Jordanen matrizeak Jordanen blokeekin osatuak daude. Nolakoa izan behar du oinarri bat elkartutako matrizea Jordanen bloke bat izateko? Hurrengo teoremak ematen digu erantzuna.

Ikus dezagun Jordanen bloke bat lortzen ze motatako oinarrik erabili behar ditugun.

Teorema 2.4.1. *Izan bedi $v \in Ker(f - \lambda 1_V)^i - Ker(f - \lambda 1_V)^{i-1}$. Definitzen dugu hurrengo azpiespazioa:*

$$W = \langle (f - \lambda 1_V)^{i-1}(v), (f - \lambda 1_V)^{i-2}(v), \cdots, (f - \lambda 1_V)(v), v \rangle$$

Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

- *(i) W f-aldagaitza da.*

- *(ii)* $\{(f-\lambda 1_V)^{i-1}(v),(f-\lambda 1_V)^{i-2}(v),\cdots,(f-\lambda 1_V)(v),v\}$ *W-ren oinarria da.*

- *(iii)* $f|W$ *aplikazioari elkartutako matrizea aurreko oinarriarekiko hurrengoa da:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Frogapena 2.4.2. *Demagun* $\{(f-\lambda 1_V)^{i-1}(v),(f-\lambda 1_V)^{i-2}(v),\cdots,(f-\lambda 1_V)(v),v\}$ *W-ren oinarria dela. orduan:*

- *(i)* $f((f-\lambda 1_V)^{i-1}(v)) = (f-\lambda 1_V+\lambda 1_V)((f-\lambda 1_V)^{i-1}(v)) = \lambda(f-\lambda 1_V)^{i-1}(v) \in W$

- *(ii)* $f((f-\lambda 1_V)^{i-2}(v)) = (f-\lambda 1_V+\lambda 1_V)((f-\lambda 1_V)^{i-2}(v)) = (f-\lambda 1_V)^{i-1}(v)+\lambda(f-\lambda 1_V)^{i-2}(v) \in W$

- *(iii)* $f((f-\lambda 1_V)^{i-3}(v)) = (f-\lambda 1_V+\lambda 1_V)((f-\lambda 1_V)^{i-3}(v)) = (f-\lambda 1_V)^{i-2}(v)+\lambda(f-\lambda 1_V)^{i-3}(v) \in W$

Era berean eginez oinarriko beste bektoreekin frogatzen ditugu (i) eta (iii) atalak

Teorema 2.4.3. *Izan bedi* $f \in End(V)$ *balio propio bakarra* λ *izanik, hau da* $V = V^*(\lambda)$. *Orduan existitzen da V-n oinarri bat,* β, $\{(f-\lambda 1_V)^{i-1}(v),(f-\lambda 1_V)^{i-2}(v),\cdots,(f-\lambda 1_V)(v),v\}$ *moduko multzoen bildura bat dena non* $M_\beta(f)$ *J Jordanen matrize bat den.*

Frogapena 2.4.4. *Oinarria eta Jordanen matrizea lortzeko metodoa emango dugu. Horretarako* $V^*(\lambda) = Ker(f-\lambda 1_V)^j$ *denez hurrengo taula eraikiko dugu:*

Dimentsioak	*Azpiespazioak*	*Oinarriko Bektoreak*
d_j	$Ker(f-\lambda 1_V)^j$	$v_{11},...,v_{1n_j}$
d_{j-1}	$Ker(f-\lambda 1_V)^{j-1}$	$(f-\lambda 1_V)(v_{11}),...,(f-\lambda 1_V)(v_{1n_j}),v_{21},...,v_{2n_{j-1}}\cdots$
d_{j-2}	$Ker(f-\lambda 1_V)^{j-2}$	$(f-\lambda 1_V)^2(v_{11}),...,(f-\lambda 1_V)^2(v_{1n_j}),(f-\lambda 1_V)(v_{21}),...,(f-\lambda 1_V)(v_{2n_{j-1}})\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
d_2	$Ker(f-\lambda 1_V)^2$	$(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{11}),...,(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{1n_j}),(f-\lambda 1_V)^{j-3}(v_{21}),...,(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{2n_{j-1}})\cdots$
d_1	$Ker(f-\lambda 1_V)$	$(f-\lambda 1_V)^{j-1}(v_{11}),...,(f-\lambda 1_V)^{j-1}(v_{1n_j}),(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{21}),...,(f-\lambda 1_V)^{j-2}(v_{2n_{j-1}})\cdots$

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^6)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kalkulatzen dugu f-ren polinomio karakteristikoa: $\chi_f(x) = (x-1)^6$. Orduan, aurreko teoremako egoeran gaude, hau da, f-k balio propio bakarra du. Beraz $\mathbb{R}^6 = V^*(1)$ da, hala ere, Jordanen matrizea eta oinarria lortzeko beharrezkoa ditugu nukleo guztiak:

1.- $Ker(f - 1_{\mathbb{R}^6}) = \langle (0,1,2,0,0,0), (0,0,0,1,2,0), (0,0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_1 = 3$ da.

2.- $Ker(f - 1_{\mathbb{R}^6})^2 = \langle (1,0,-3,0,0,0), (0,1,2,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0),$
$(0,0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_2 = 5$ da.

3.- $V^*(1) = Ker(f - 1_{\mathbb{R}^6})^3 = \mathbb{R}^6$ eta $d_3 = 6$ da.

(i) Alde batetik, dimentsioak erabiliz, Jordanen matrizea kalkulatuko dugu:

$$\begin{array}{llll} & 0 & & \\ d_3 = 6 & & 1 & \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\ & 1 & & \\ d_2 = 5 & & 1 & \text{bloke } 2 \times 2 \text{ ordenakoa} \\ & 2 & & \\ d_1 = 3 & & 1 & \text{bloke } 1 \times 1 \text{ ordenakoa} \\ & 3 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Beraz $J = \begin{pmatrix} J_3(1) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(1) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Bestetik oinarria lortuko dugu hurrengo taularen bitartez:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 6$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^3$	v_1
$d_2 = 5$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_2$
$d_1 = 3$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_3$

Orduan $\beta = \{(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_1, (f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_2, v_3\}$ da behar dugun oinarria (ordena honetan).

Gainera:

(a) $v_1 \in Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^3 - Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2$.

(b) $v_2 \in Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2 - Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})$ eta $(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_2$ linealki independenteak izan behar dira.

(c) $v_3 \in Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})$ eta $(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_3$ linealki independenteak izan behar dira.

Adibidez $v_1 = (0,0,1,0,0,0)$ aukeratuz $(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_1) = (1,1,-1,0,0,0)$ eta $f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})^2(v_1) = (0,1,2,0,0,0)$ dira. Orain $v_2 = (0,0,0,1,0,0)$ aukera daiteke eta orduan $(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^6})(v_2) = (0,0,0,2,4,0)$ da eta azkenik $v_3 = (0,0,0,0,0,1)$ aukera daiteke. Ondorioz:

$$\beta = \{(0,1,2,0,0,0), (1,1,-1,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,2,4,0), (0,0,0,1,0,0),$$

$(0,0,0,0,0,1)\}$ da bilatzen genuen oinarria non $M_\beta(f) = J$ den.

∎

Teorema 2.4.5. *Izan bedi $f \in End(V)$ non $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_s)^{t_s}$ den, hau da, polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gorputzean daude. urreko teoremako metodoa erabiliz $V^*(\lambda_i)$ azpiespazioan $\beta_{V^*(\lambda_i)}$ oinarria lortzen badugu, $i = 1, ..., s$. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup \cdots \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ V-ren oinarria da eta $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea da.*

Frogapena 2.4.6. *Ohartu $V = V^*(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V^*(\lambda_s)$ dela eta $V^*(\lambda_i)$ azpiespazio f-aldagaitza da $i = 1, ..., s$.*

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^4)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Dakigunez $\chi_f(x) = (x-1)^3(x+1)$ da eta balio propioak: $1, -1$. Beraz aurkitu daiteke β oinarri bat non $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea den. Gainera $\beta = \beta_{V^*(1)} \cup \beta_{V^*(-1)}$ eta $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$. Hau da, azpiespazio orokortu bakoitzean oinarri bat eta Jordanen matrize bat lortu behar ditugu.

(i) $V^*(1)$ azpiespazioa

Kalkuluak eginez lortzen ditugu hurrengo emaitzak:

$$Ker(f - 1_{\mathbb{R}^4}) = \langle(1,-2,2,-2)\rangle, Ker(f - 1_{\mathbb{R}^4})^2 = \langle(1,0,0,-2),(0,1,-1,0)\rangle$$

eta

$Ker(f - 1_{\mathbb{R}^4})^3 = \langle(1,0,0,-2),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$

Orduan $V^*(1) = Ker(f - 1_{\mathbb{R}^4})$ eta datu hauekin $\beta_{V^*(1)}$ eta J_1 lortu ahal ditugu:

1.- J_1 matrizea lortzeko hurrengoa egiten dugu:

$$\begin{array}{lccl}
 & 0 & & \\
d_3 = 3 & & 1 & \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\
 & 1 & & \\
d_2 = 2 & & 0 & \\
 & 1 & & \\
d_1 = 1 & & 0 & \\
 & 1 & & \\
\quad 0 & & &
\end{array}$$

Beraz $J_1 = (J_3(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.- $\beta_{V^*(1)}$ lortzeko hurrengo taularen bitartez egingo dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 3$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^3$	v
$d_2 = 2$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})(v)$
$d_1 = 1$	$Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2(v)$

$v \in KerKer(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^3 - Ker(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2$ izanik, adibidez $v = (0,1,0,0)$. Orduan $\beta_{V^*(1)} = \{(-1,2,-2,2),(0,-1,1,0),(0,1,0,0)\}$

(ii) $V^*(-1)$ azpiespazioa

Kalkulua eginez ondorengoa lortzen dugu $V^*(-1) = Ke(f+1_{\mathbb{R}^4}) = \langle(1,-1,1,-1)\rangle$. Orduan $J_2 = (-1)$ da eta $\beta_{V^*(-1)} = \{(1,-1,1,-1)\}$.

Beraz $\beta = \{(-1,2,-2,2),(0,-1,1,0),(0,1,0,0),(1,-1,1,-1)$ $\mathbb{R}^4$ espazioaren oinarria da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Jordanen matrizea da.

■

Ondorioa 2.4.7. *Izan bedi $f \in End(V)$. Orduan existitzen da β V-ren oinarria non $M_\beta(f)$ Jordanen matrizea den baldin eta soilik baldin $\chi_f(x)$ polinomioaren erro guztiak K gorputzean badaude.*