

2. Gaia 2

Endomorfismoen Jordanen Forma Kanonikoa

2.1 Sarrera

Izan bedi V dimentsio finituko K -espazio bektoriala. f V gaineko endomorfismoa. Dakigunez f diagonalgarria da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen baditu:

- (i) $\chi_f(x)$ polinomioaren erroak K gainean daude.
- (ii) λ f -ren balio propioa bada: $\dim V(\lambda) = m(\lambda)$.

Ikusten den bezala (ii) baldintza oso gogorra da eta horregatik beste irtenbide batzuk bilatzen saiatuko gara. Hurrengo galdera izan daiteke bat:

Existitzen al da β V -ren oinarri bat non $M_\beta^\beta(f)$ matrize elkartua trianguluarra den?

Definizioa 2.1.1. *Izan bedi $A \in M_n K$ matrizea.*

(i) A **goi-trianguluarra dela esaten da baldin eta A matrizean diagonal nagusiaren azpitik dauden elementu guztiak 0 badira. Hau da:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



(ii) *A behe-triangeluarra dela esaten da baldin eta A matrizean diagonal nagusiaren ginetik dauden elementu guztiak 0 badira. Hau da:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Edoizein kasutan A triangeluarra dela esaten da.

Ohartu ezaguna dela $f : V \rightarrow V$ aplikazio lineala bada existitzen direla bi oinarriak β eta β' non:

$$M_{\beta'}^{\beta}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lortutako matrizea triangeluarra da baina gai honetan eskatzen dugu gainera eremuko eta helburu-multzoko oinarria berbera izatea eta hau aurreko teoremak ez digu zihurtatzen.

2.2 Endomorfismo Triangeluargarriak

Definizioa 2.2.1. *Izan bedi $f \in \text{End}(V)$. f triangeluargarria dela esaten da baldin eta existitzen bada β V -ren oinarri bat non $M_{\beta}(f)$ triangeluarra dan.*

Adibidea. Izan bedi $f \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ non $f(x, y) = (x + y, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Orduan:

(i) β_k oinarri kanonikoa bada $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triangeluarra da.

(ii) $\beta = \{(1, 0), \lambda(1, 0)\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, oinarria da eta $M_{\beta}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triangeluarra da.

Hau da elkartutako matrize triangeluarra ez da bakarra

■

Arazo honengatik aurreko galdera gehiago zehaztuko dugu baino horretarako hurrengo definizioak behar ditugu.

Definizioa 2.2.2. *Izan bitez $\lambda \in K$ eta $r \geq 1$. Jordanen bloke bat hurrengo erako matrize bat da:*

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Adibidea. $J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ eta $J_1(0) = (0)$

Jordanen blokeak dira denak.

■

Definizioa 2.2.3. *Matrize bat, J , Jordanen Matrizea dela esaten da blokeka diagonalak bada eta bloke bakoitza Jordanen bloke bat bada. Hau da:*

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{r_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Adibidea. $\begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Jordana-

nen matrizea da.

■

Oharrak 2.2.4. (i) *Jordanen matrizeak triangeluarrak dira.*

(ii) *Matrize diagonalak Jordanen matrizeak ere badira:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_1(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Orduan hurrengo galdera dugu:

$f \in \text{End}(V)$ bada, existitzen al da β V -ren oinarri bat non $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea den?

2.3 Azpiespazio Propio Orokortuak

Azpiespazio propio orokortuak definituko ditugu.

Definizioa 2.3.1. *Izan bedi λ f -ren balio propio bat. λ -ri elkartutako azpiespazio propio orokortua hurrengo da:*

$$V^*(\lambda) = \{v \in V \mid \exists i, (f - \lambda \cdot 1_V)^i(v) = 0\}.$$

Ohartu hurrengo katea dugula:

$$V(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V) \subseteq \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)^2 \subseteq \dots \subseteq V^*(\lambda)$$

Azpiespazio propio orokortuak zehazki kalkulatzeko hurrengo teorema behar dugu:

Teorema 2.3.2. *Izan bedi λ f -ren balio propioa. Orduan:*

- (i) $V^*(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)^j, j \in \{1, \dots, m(\lambda)\}$ baterako.
- (ii) $\dim V^*(\lambda) = m(\lambda)$.

Adibidea. Izan bedi $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Orduan f -ren azpiespazio orokortuak lortu nahi baditugu:

(i) f -ren balio propioak kalkulatzeko dira. $\chi_f(x) = (x - 1)^3(x + 1)$ enez f -ren balio propioak 1 eta -1 dira. Beraz bi azpiespazio propio orokortu daude.

(ii) $V^*(-1) = V(-1)$ da, dimentsioa 1 delako.

(iii) $V^*(1) = \text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^4})^3$ da $\dim \text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^4}) = 1$ eta $\dim \text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^4})^2 = 2$ direlako.

■

Oharrak 2.3.3. 1. Izan bedi $V^*(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda 1_V)^j$. Orduan frogatu daiteke hurrengo katea dugula:

$$\text{Ker}(f - \lambda 1_V) \subseteq \text{Ker}(f - \lambda 1_V)^2 \subseteq \text{Ker}(f - \lambda 1_V)^3 \subseteq \dots \subseteq \text{Ker}(f - \lambda 1_V)^{j-1} \subseteq V^*(\lambda)$$

eta partekotasun guztiak hertsia dira, hau da, ez da berdintzarik ematen.

2.- $V^*(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda 1_V)^j$ azpiespazio f -aldagaitza da.

3.- $\dim V(\lambda) = m(\lambda)$ denean $V^*(\lambda) = V(\lambda)$ betetzen da.

Teorema 2.3.4 (Deskonposaketa Primarioa). Izan bedi $f \in \text{End}(V)$ non $\chi_f(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean dauden. Hau da, $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \dots (x - \lambda_s)^{t_s}$ da, $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ desberdinak izanik. Orduan:

$$V = V^*(\lambda_1) \oplus V^*(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V^*(\lambda_s)$$

Oharra 2.3.5. Aurreko teoremaren arabera. $\beta_{V^*(\lambda_1)}, \dots, \beta_{V^*(\lambda_s)}$ $V^*(\lambda_1), \dots, V^*(\lambda_s)$ azpiespazioen oinarriak badira hurrenez-hurren. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup \dots \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ V -ren oinarria da eta matrize elkartua blokeka diagonal da:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_s \end{pmatrix}$$

Gainera $B_i = M_{\beta_{V^*(\lambda_i)}}(f|_{V^*(\lambda_i)})$ da $i = 1, \dots, s$.

Beraz $V^*(\lambda)$ azpiespazio propio orokortuan aurkitzen badugu oinarri bat non matrize elkartua Jordanen matrize bat den galderaren erantzuna lortuko genuke.

2.4 Endomorfismo Triangeluargarri Baten Jordanen Forma Kanonikoa

Dakigunez, Jordanen matrizeak Jordanen blokeekin osatuak daude. Nolakoa izan behar du oinarri bat elkartutako matrizea Jordanen bloke bat izateko? Hurrengo teorema ematen digu erantzuna.

Ikus dezagun Jordanen bloke bat lortzen ze motatako oinarrik erabili behar ditugun.

Teorema 2.4.1. *Izan bedi $v \in \text{Ker}(f - \lambda 1_V)^i - \text{Ker}(f - \lambda 1_V)^{i-1}$. Definitzen dugu hurrengo azpiespazioa:*

$$W = \langle (f - \lambda 1_V)^{i-1}(v), (f - \lambda 1_V)^{i-2}(v), \dots, (f - \lambda 1_V)(v), v \rangle$$

Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

- (i) W f -aldagaitza da.
- (ii) $\{(f - \lambda 1_V)^{i-1}(v), (f - \lambda 1_V)^{i-2}(v), \dots, (f - \lambda 1_V)(v), v\}$ W -ren oinarria da.
- (iii) $f|_W$ aplikazioari elkartutako matrizea aurreko oinarriarekiko hurrengo da:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Frogapena 2.4.2. *Demagun $\{(f - \lambda 1_V)^{i-1}(v), (f - \lambda 1_V)^{i-2}(v), \dots, (f - \lambda 1_V)(v), v\}$ W -ren oinarria dela. orduan:*

- (i) $f((f - \lambda 1_V)^{i-1}(v)) = (f - \lambda 1_V + \lambda 1_V)((f - \lambda 1_V)^{i-1}(v)) = \lambda(f - \lambda 1_V)^{i-1}(v) \in W$
- (ii) $f((f - \lambda 1_V)^{i-2}(v)) = (f - \lambda 1_V + \lambda 1_V)((f - \lambda 1_V)^{i-2}(v)) = (f - \lambda 1_V)^{i-1}(v) + \lambda(f - \lambda 1_V)^{i-2}(v) \in W$
- (iii) $f((f - \lambda 1_V)^{i-3}(v)) = (f - \lambda 1_V + \lambda 1_V)((f - \lambda 1_V)^{i-3}(v)) = (f - \lambda 1_V)^{i-2}(v) + \lambda(f - \lambda 1_V)^{i-3}(v) \in W$

Era berean eginez oinarriko beste bektoreekin frogatzen ditugu (i) eta (iii) atalak

Teorema 2.4.3. *Izan bedi $f \in \text{End}(V)$ balio propio bakarra λ izanik, hau da $V = V^*(\lambda)$. Orduan existitzen da V -n oinarri bat, β , $\{(f - \lambda 1_V)^{i-1}(v), (f - \lambda 1_V)^{i-2}(v), \dots, (f - \lambda 1_V)(v), v\}$ moduko multzoen bildura bat dena non $M_\beta(f)$ J Jordanen matrize bat den.*

Frogapena 2.4.4. *Oinarria eta Jordanen matrizea lortzeko metodoa emango dugu. Horretarako $V^*(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda 1_V)^j$ denez hurrengo taula eraikiko dugu:*

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
d_j	$\text{Ker}(f - \lambda 1_V)^j$	v_{11}, \dots, v_{1n_j}
d_{j-1}	$\text{Ker}(f - \lambda 1_V)^{j-1}$	$(f - \lambda 1_V)(v_{11}), \dots, (f - \lambda 1_V)(v_{1n_j}), v_{21}, \dots, v_{2n_{j-1}}, \dots$
d_{j-2}	$\text{Ker}(f - \lambda 1_V)^{j-2}$	$(f - \lambda 1_V)^2(v_{11}), \dots, (f - \lambda 1_V)^2(v_{1n_j}), (f - \lambda 1_V)(v_{21}), \dots, (f - \lambda 1_V)(v_{2n_{j-1}}), \dots$
\vdots	\vdots	\vdots
d_2	$\text{Ker}(f - \lambda 1_V)^2$	$(f - \lambda 1_V)^{j-2}(v_{11}), \dots, (f - \lambda 1_V)^{j-2}(v_{1n_j}), (f - \lambda 1_V)^{j-3}(v_{21}), \dots, (f - \lambda 1_V)^{j-2}(v_{2n_{j-1}}), \dots$
d_1	$\text{Ker}(f - \lambda 1_V)$	$(f - \lambda 1_V)^{j-1}(v_{11}), \dots, (f - \lambda 1_V)^{j-1}(v_{1n_j}), (f - \lambda 1_V)^{j-2}(v_{21}), \dots, (f - \lambda 1_V)^{j-2}(v_{2n_{j-1}}), \dots$



Adibidea. Izan bedi $f \in \text{End}(\mathbb{R}^6)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kalkulatzen dugu f -ren polinomio karakteristikoa: $\chi_f(x) = (x - 1)^6$. Orduan, aurreko teoremako egoeran gaude, hau da, f -k balio propio bakarra du. Beraz $\mathbb{R}^6 = V^*(1)$ da, hala ere, Jordanen matrizea eta oinarria lortzeko beharrezkoa ditugu nukleo guztiak:

1.- $\text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^6}) = \langle (0, 1, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1) \rangle$ beraz $d_1 = 3$ da.

2.- $\text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^6})^2 = \langle (1, 0, -3, 0, 0, 0), (0, 1, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1) \rangle$ beraz $d_2 = 5$ da.

3.- $V^*(1) = \text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^6})^3 = \mathbb{R}^6$ eta $d_3 = 6$ da.

(i) Alde batetik, dimentsioak erabiliz, Jordanen matrizea kalkulatu dugu:

$$\begin{array}{r} 0 \\ d_3 = 6 \quad 1 \quad \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\ 1 \\ d_2 = 5 \quad 1 \quad \text{bloke } 2 \times 2 \text{ ordenakoa} \\ 2 \\ d_1 = 3 \quad 1 \quad \text{bloke } 1 \times 1 \text{ ordenakoa} \\ 3 \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Beraz } J = \begin{pmatrix} J_3(1) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(1) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Bestetik oinarria lortuko dugu hurrengo taularen bitartez:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 6$	$Ker(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^3$	v_1
$d_2 = 5$	$Ker(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^2$	$(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_2$
$d_1 = 3$	$Ker(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})$	$(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_3$

Orduan $\beta = \{(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_1, (f - \lambda_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_2, v_3\}$ da behar dugun oinarria (ordena honetan).

Gainera:

(a) $v_1 \in Ker(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^3 - Ker(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^2$.

(b) $v_2 \in Ker(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^2 - Ker(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})$ eta $(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})(v_1), v_2$ linealki independenteak izan behar dira.

(c) $v_3 \in Ker(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})$ eta $(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^2(v_1), (f - \lambda_{\mathbb{R}^6})(v_2), v_3$ linealki independenteak izan behar dira.

Adibidez $v_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ aukeratuz $(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})(v_1) = (1, 1, -1, 0, 0, 0)$ eta $(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})^2(v_1) = (0, 1, 2, 0, 0, 0)$ dira. Orain $v_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ aukera daiteke eta orduan $(f - \lambda_{\mathbb{R}^6})(v_2) = (0, 0, 0, 2, 4, 0)$ da eta azkenik $v_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ aukera daiteke. Ondorioz:

$\beta = \{(0, 1, 2, 0, 0, 0), (1, 1, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 2, 4, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0),$

$(0, 0, 0, 0, 0, 1)\}$ da bilatzen genuen oinarria non $M_\beta(f) = J$ den.

■

Teorema 2.4.5. *Izan bedi $f \in End(V)$ non $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_s)^{t_s}$ den, hau da, polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gorputzean daude. urreko teoremako metodoa erabiliz $V^*(\lambda_i)$ azpiespazioan $\beta_{V^*(\lambda_i)}$ oinarria lortzen badugu, $i = 1, \dots, s$. Orduan $\beta = \beta_{V^*(\lambda_1)} \cup \cdots \cup \beta_{V^*(\lambda_s)}$ V -ren oinarria da eta $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea da.*

Frogapena 2.4.6. *Ohartu $V = V^*(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V^*(\lambda_s)$ dela eta $V^*(\lambda_i)$ azpiespazio f -aldagaitza da $i = 1, \dots, s$.*

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^4)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Dakigunez $\chi_f(x) = (x - 1)^3(x + 1)$ da eta balio propioak: $1, -1$. Beraz aurkitu daiteke β oinarri bat non $M_\beta(f) = J$ Jordanen matrizea den. Gainera $\beta = \beta_{V^*(1)} \cup \beta_{V^*(-1)}$ eta $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$. Hau da, azpiespazio orokortu bakoitzean oinarri bat eta Jordanen matrize bat lortu behar ditugu.

(i) $V^*(1)$ azpiespazioa

Kalkuluak eginenez lortzen ditugu hurrengo emaitzak:

$$\text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, -2, 2, -2) \rangle, \text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^4})^2 = \langle (1, 0, 0, -2), (0, 1, -1, 0) \rangle$$

eta

$$\text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^4})^3 = \langle (1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle$$

Orduan $V^*(1) = \text{Ker}(f - 1_{\mathbb{R}^4})$ eta datu hauekin $\beta_{V^*(1)}$ eta J_1 lortu ahal ditugu:

1.- J_1 matrizea lortzeko hurrengoa egiten dugu:

$$\begin{array}{r} 0 \\ d_3 = 3 \quad 1 \quad \text{bloke } 3 \times 3 \text{ ordenakoa} \\ 1 \\ d_2 = 2 \quad 0 \\ 1 \\ d_1 = 1 \quad 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Beraz } J_1 = (J_3(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.- $\beta_{V^*(1)}$ lortzeko hurrengo taularen bitartez egingo dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 3$	$\text{Ker}(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^3$	v
$d_2 = 2$	$\text{Ker}(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})(v)$
$d_1 = 1$	$\text{Ker}(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})$	$(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2(v)$

$v \in \text{Ker}(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^3 - \text{Ker}(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^4})^2$ izanik, adibidez $v = (0, 1, 0, 0)$. Orduan $\beta_{V^*(1)} = \{(-1, 2, -2, 2), (0, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$

(ii) $V^*(-1)$ azpiespazioa

Kalkulua eginez ondorengo lortzen dugu $V^*(-1) = Ke(f+1_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, -1, 1, -1) \rangle$.
Orduan $J_2 = (-1)$ da eta $\beta_{V^*(-1)} = \{(1, -1, 1, -1)\}$.

Beraz $\beta = \{(-1, 2, -2, 2), (0, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, -1, 1, -1)\}$ \mathbb{R}^4 espazioaren oinarria da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Jordanen matrizea da.

■

Ondorioa 2.4.7. *Izan bedi $f \in \text{End}(V)$. Orduan existitzen da β V -ren oinarria non $M_\beta(f)$ Jordanen matrizea den baldin eta soilik baldin $\chi_f(x)$ polinomioaren erro guztiak K gorputzean badaude.*