1. Gaia 1

Espazio Bektorial eta Oinarriei Buruzko Oinarrizko Elementuak

Izan bitez $(K, +, \cdot)$ gorputza eta V multzoa. V K-**espazio bektoriala** dela esango dugu baldin eta hurrengo baldintzak betetzen badira:

1.- V-n eragiketa bat definiturik dago, $+$ denotatuko duguna, eta $(V, +)$ talde abeldarra da.

2.- Existitzen da aplikazio bat:

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \to & V \\ (k, v) & \to & kv \end{array}$$

kanpoko biderketa deitzen dena, hurrengo propietateak betetzen dituelarik:

(i) $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v, \forall k_1, k_2 \in K, \forall v \in V$.

(ii) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2, \forall v_1, v_2 \in V, \forall k \in K$.

(iii) $(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v), \forall k_1, k_2 \in K, \forall v \in V$.

(iv) $1_K v = v, \forall v \in V$.

V-ko elementuak **bektoreak** deitzen dira eta K-koak berriz **eskalarrak**.

Gehien erabiltzen diren espazio bektorialak hurrengoak dira:

1.- $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala da ondorengo batuketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Kanpoko biderketa:

$$k(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n), \forall k \in \mathbb{R}, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Kasu orokorra, K edozein gorputza bada K^n K-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in K^n.$$

Kanpoko biderketa:

2.- $M_{n\times m}(K) = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad | \quad a_{ij} \in K, \forall i \in \{1, ..., n\}$

$, \forall j \in \{1, .., m\}\}$ K-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{n\times m}(K).$$

Kanpoko biderketa:

$$k(a_{ij}) = (ka_{ij}), \forall k \in K, \forall (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K).$$

(iii) $P_n(K) = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \quad | \quad a_i \in K, i = 0, ..., n\}$ K-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(a_0+a_1x+...+a_nx^n)+(b_0+b_1x+...+b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_n+b_n)x^n$$

$$, \forall a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in P_n(K)$$

Kanpoko biderketa:

$$k(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = ka_0 + ka_1x + ... + ka_nx^n,$$

$$\forall k \in K, \forall a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in P_n(K).$$

Izan bedi V K-espazio bektoriala. Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

(i)$k \cdot 0_V = 0_V, \forall k \in K$.

(ii) $0_K \cdot v = 0_V, \forall v \in V$.

(iii) $k \cdot v = 0_V$ da baldin eta soilik baldin $k = 0_K$ edo $v = 0_V$ bada.

(iv) $-v = (-1_K)v, \forall v \in V$.

Izan bedi V K-espazio bektoriala. $W \subseteq V$ azpimultzo bat V-ren **azpiespazio bektoriala**, edo azpiespazioa, dela esaten da, eta $W \leq V$ denotatuko dugu, baldin eta W, V-ko eragiketa eta kanpoko biderkaketa berdinekin, K-espazio bektoriala bada. Dakigunez W V-ren azpiespazioa da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen baditu: $w_1 + w_2 \in W, \forall w_1, w_2 \in W$. eta $kw \in W, \forall k \in K, \forall w \in W$.

Adibideak:

(i) Izan bedi $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala orduan $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y = x\}$ azpiespazioa da baina $W' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y = x + 1\}$ ez.

(ii) Izan bitez V K-espazio bektoriala eta $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ bektore finkoak orduan $\{k_1v_1+...+k_nv_n \quad | \quad k_i \in K, i = 1, .., n\}$ V-ren azpiespazioa da. Azpiespazio hau $\langle v_1, ..., v_n\rangle$ moduan denotatuko dugu eta $v_1, ..., v_n$ bektoreek sortutako azpiespazioa deitzen da. Orokorrean, $S \subseteq V$ bada S-ko sortutako azpiespazioa honela definitzen da:

$$\langle S \rangle = \{k_1 v_1 + ... + k_n v_n \quad | \quad k_i \in K, v_i \in S, i = 1, ..., n\}$$

Froga daiteke $\langle S \rangle$ dela S barruan duen azpiespaziorik txikiena.

Izan bitez $W_1, W_2, ..., W_n$ V-ren azpiespazioak. Orduan $\cap_{i=1}^{n} W_i$ eta $W_1 + ... + W_n = \{w_1 + ... + w_n | w_i \in W_i, i = 1, ..., n\}$ V-ren azpiespazioak dira. $W_1 + ... + W_n$ azpiespazio $W_1, ..., W_n$-ren arteko `batura` deitzen da eta batura `zuzena` dela esaten da baldin eta $W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_n) = \{0_V\}$ bada $i = 1, ..., n$, eta kasu honetan $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ moduan denotatuko dugu.

Espazio bektorialetan oso garrantzitsuak dira oinarriak. β V-ren **oinarria** dela esaten da baldin eta β V-ren sistema sortzailea eta sistema askea bada.

Adibideak:

1.- Izan bedi $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala, definitzen ditugu $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, 1 i. tokian dugu, $i = 1, ..., n$ orduan $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat da, oinarri hau **kanonikoa** deitzen da eta β_k moduan denotatuko dugu.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \} \text{ espazioaren oinarri bat da.}$$

2.- Izan bedi $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y + z = 0\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazioa orduan $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ W-ren oinarri bat da.

Izan bedi $\{0_V\} \neq V$ finituki sortua. Orduan oinarri baten kardinala, aurreko teoremaren arabera berdin du ze oinarri aukeratu, V-ren **dimentsioa** deitzen da eta denotatuko dugu $dim_K V$ edo $dim V$ moduan.

Adibideak:

1.- Izan bedi K^n K espazio bektoriala orduan $dim K^n = n$ da.

2.- Izan bedi $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y + z = 0\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazioa orduan $dim W = 2$ da.

Izan bedi $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria. Orduan V-ko edozein bektore β-ko bektoreen konbinazio lineal moduan era bakar batean adierazi ahal da.

Hau da, $v \in V$ bada orduan existititzen dira $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ bakarrak non $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ betetzen den, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ v-ren **koordenatuak** β **oinarriarekiko** deitzen ditzen dira eta denotatuko dugu $M_\beta(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Adibidea: Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala. $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ oinarriarekiko $M_\beta(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix}$ da.

Izan bitez $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V-ren bi oinarriak. Orduan $v \in V$ bektorearentzat $M_\beta(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ eta $M_{\beta'}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$ desberdinak dira. $v_i \in V$ denez eta β' V-ren oinarria, existituko dira $a_{1i}, ..., a_{ni}$ eskalar bakarrak non $v_i = a_{1i} v_1' + ... + a_{ni} v_n'$ betetzen duen $i = 1, ..., n$. Orduan

$$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrizea β oinarritik β' oinarrirako aldaketaren matrizea deitzen da eta denotatuko dugu $M_\beta^{\beta'}$.

Adibidea: Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala. $\beta_k = \{e_1, e_2, e_3\}$ eta $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ oinarriak hartzen baditugu orduan:

$$M_\beta^{\beta_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ eta } M_{\beta_k}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$