1. Gaia 3

Endomorfismo eta Matrize Karratu baten Balio eta Bektore Propioak

Izan bedi $f \in End(V)$. $\lambda \in K$ f-ren **balio propioa** dela esaten da existitzen bada $v \in V - \{0\}$ non $f(v) = \lambda v$ betetzen den. Kasu honetan, v λ-ri elkartutako **bektore propioa** dela esaten da.

Adibidea 3.0.1. *Izan bedi* $f \in End(\mathbb{R}^3)$ *non* $f(x,y,z) = (x+y, y, y+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Ikus dezagun $\lambda = 0$ f*-ren balio propio bat den ala ez. Definizioaren arabera, existitu behar da* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ *non* $f(x,y,z) = 0 \cdot (x,y,z)$ *betetzen den. Hau da aurkitu behar dugu hurrengo sistema homogeneoaren soluzio ez-nulu bat.*

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ y &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

Argi eta garbi, sistemaren soluzio bakarra $(0,0,0)$ *beraz* $\lambda = 0$ *ez da* f*-ren balio propioa.*

(ii) Ikus dezagun $\lambda = 1$ f*-ren balio propio bat den ala ez. Definizioaren arabera, existitu behar da* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ *non* $f(x,y,z) = 1 \cdot (x,y,z)$ *betetzen den. Hau da aurkitu behar dugu hurrengo sistemaren soluzio ez-nulua*

$$\begin{cases} x+y & = & x \\ y & = & y \\ y+z & = & z \end{cases}$$

Sistemaren soluzioen multzoa $\{(x,0,z) \quad | \quad x,z \in \mathbb{R}\}$ *da eta beraz, badaude bektore ez-nuluak. Honek frogatzen du* $\lambda = 1$ f*-ren balio propioa dela eta bestalde* $(x,0,z)$ *moduko bektore ez-nulu guztiak* 1 *balio propioari elkartutako bektore propioak dira.*

Oharra 3.0.2. *Gogoratu* $\lambda = 0$ *balio propioa izan ahal dela baina* $v = 0_V$ *ez dela inoiz bektore propioa.*

Balio propioei lotuta hurrengo azpiespazioa dugu:

$$V(\lambda) = \{v \in V \quad | \quad f(v) = \lambda \cdot v\}$$

Orduan $V(\lambda)$ V-ren azpiespazioa da eta λ-ri elkartutako azpiespazio propioa deitzen da. Gogoratu azpiespazio hau f-aldagaitza dela eta $M_{\beta_{V(\lambda)}}(f|V(\lambda)) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ diagonala da.

Adibidea 3.0.3. *Izan bedi* $f \in End(\mathbb{R}^3)$ *non* $f(x,y,z) = (x+y, y, y+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Orduan* $V(1) = \langle (1,0,0),(0,0,1) \rangle$ *dugu.*

Era berean matrize karratu baten kasuan.

Izan bedi $A \in M_n(K)$ karratua. $\lambda \in K$ f-ren **balio propioa** dela esaten da baldin eta existitzen bada $(a_1,...,a_n) \in K^n - \{(0,...,0)\}$ non:

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Kasu honetan, $(a_1,...,a_n)$ λ-ri elkartutako **bektore propioa** dela esaten da.

Oharra: $f \in End(V)$ bada eta β V-ren oinarria bada orduan, definizioaren arabera, f-ren balio propioak eta $M_\beta(f)$ matrizearen balio propioak berberak dira.

Izan bitez $A \in M_n(K)$ eta $\lambda \in K$ A-ren balio propioa. Definitzen dugu hurrengo multzoa:

$$V(\lambda) = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \quad | \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \}$$

Orduan $V(\lambda)$ K^n-ren azpiespazio da eta λri elkartutako azpiespazio propioa deitzen da.

Adibidea 3.0.4. *Izan bedi* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *matrizea. Orduan* 5 *balio propioa da eta* $V(5)$ *lortzeko hurrengo sistema homogeneoa ebatzi behar dugu:*

$$\begin{cases} -6y + 6z & = & 0 \\ 3x - 3y & = & 0 \end{cases}$$

Beraz $V(5) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ *da.*