1. Gaia 2

Aplikazio Lineala eta Elkartutako Matrizea

Izan bitez V eta $V^{'}$ K-espazio bektorialak. $f : V \to V^{'}$ aplikazio bat **lineala** dela esango dugu hurrengo baldintzak betetzen baditu:

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$.

(ii) $f(kv) = kf(v), \forall v \in V, \forall k \in K$.

Adibidea: Izan bedi $V = V^{'} = \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala. Definitzen dugu $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 & \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$. Orduan f aplikazio lineala da.

Izan bedi $f : V \to V^{'}$ aplikazio lineala bada orduan $f(k_1v_1 + ... + k_nv_n) = k_1f(v_1) + ... + k_nf(v_n), \forall k_1, ..., k_n \in K eta \forall v_1, ..., v_n \in V$.

Izan bitez V (dim$V = n$) eta $V^{'}$ (dim $V^{'} = m$) K espazio bektorialak eta $f : V \to V^{'}$ aplikazio lineala. Izan bitez $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta $V^{'}$en oinarriak hurrenez-hurren. Orduan $v = \lambda_1v_1 + ... + \lambda_nv_n$ bektorea bada

$$f(v) = (w_1...w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ f-ri elkartutako matrizea β_V eta $\beta_{V'}$ oinarriekiko deitzen da eta denotatuko dugu $M^{\beta_{V'}}_{\beta_V}(f)$.

Adibidea: Izan bedi $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x,y,z)=(x-3y,x+z),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ den.

1.- Izan bitez β_1 eta β_2 $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M^{\beta_2}_{\beta_1}(f)=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2.- Izan bitez $\beta'_1=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ eta $\beta'_2=\{(1,0),(1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M^{\beta'_2}_{\beta'_1}(f)=\begin{pmatrix}1 & -3 & -4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Izan bitez V ($\dim V=n$) eta V' ($\dim V'=m$) K espazio bektorialak eta $f:V\rightarrow V'$ aplikazio lineala.

1.- $\beta_V=\{v_1,...,v_n\}$ eta $\beta_{V'}=\{w_1,...,w_m\}$ V eta V'en oinarriak badira hurrenez-hurren orduan:

$$f(v)=(w_1...w_m)M^{\beta_{V'}}_{\beta_V}(f)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}.$$

2.- $\beta'_V=\{v'_1,...,v'_n\}$ eta $\beta'_{V'}=\{w'_1,...,w'_m\}$ V eta V'en oinarriak badira hurrenez-hurren orduan:

$$f(v)=(w'_1...w'_m)M^{\beta'_{V'}}_{\beta'_V}(f)\begin{pmatrix}\lambda'_1\\ \vdots\\ \lambda'_n\end{pmatrix}.$$

Orduan:

$$f(v)=(w'_1...w'_m)M^{\beta'_{V'}}_{\beta_{V'}}M^{\beta_{V'}}_{\beta_V}(f)M^{\beta_V}_{\beta'_V}\begin{pmatrix}\lambda'_1\\ \vdots\\ \lambda'_n\end{pmatrix}.$$

Ondorioz elkartutako matrizea bakarra denez hurrengo erlazioa frogatu dugu:

$$M^{\beta'_{V'}}_{\beta_{V'}}M^{\beta_{V'}}_{\beta_V}(f)M^{\beta_V}_{\beta'_V}=M^{\beta'_{V'}}_{\beta'_V}(f).$$

Adibidea: Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x - 3y, x + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ den. Izan bitez β_1 eta β_2 $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoak hurrenez-hurren. Aurreko adibidiean ikusi bezala

$$M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izan bitez ${\beta'}_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ eta ${\beta'}_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M_{{\beta'}_1}^{{\beta'}_2}(f) = M_{\beta_2}^{{\beta'}_2} M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) M_{{\beta'}_1}^{\beta_1}$$

Beraz:

$$M_{{\beta'}_1}^{{\beta'}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$