1. Gaia 1

Aljebra Linealaren Oinarrizko Elementuak

Gai hau Aljebra Linealerako Sarrera irakasgaitik ateratako oinarrizko elementuak baino ez dira. Helburua notazioa finkatzea da. Era sakonean errepasatu nahi baldin bada aurreko irakasgaiara joan mesedez.

1.1 Espazio Bektorialak eta Oinarriak

Izan bitez $(K, +, \cdot)$ gorputza eta V multzoa. V K-**espazio bektoriala** dela esango dugu baldin eta hurrengo baldintzak betetzen badira:

1.- V-n eragiketa bat definiturik dago, $+$ denotatuko duguna, eta $(V, +)$ talde abeldarra da.

2.- Existitzen da aplikazio bat:

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \rightarrow & V \\ (k, v) & \rightarrow & kv \end{array}$$

kanpoko biderketa deitzen dena, hurrengo propietateak betetzen dituelarik:

(i) $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v, \forall k_1, k_2 \in K, \forall v \in V$.

(ii) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2, \forall v_1, v_2 \in V, \forall k \in K$.

(iii) $(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v), \forall k_1, k_2 \in K, \forall v \in V$.

(iv) $1_K v = v, \forall v \in V$.

V-ko elementuak **bektoreak** deitzen dira eta K-koak berriz **eskalarrak**

Gehien erabiltzen diren espazio bektorialak hurrengoak dira:

Adibideak 1.1.1. *1.- $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala da ondorengo batuketa eta kanpoko biderketarekin:*

Eragiketa:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Kanpoko biderketa:

$$k(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n), \forall k \in \mathbb{R}, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Kasu orokorra, K edozein gorputza bada K^n K-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in K^n.$$

Kanpoko biderketa:

$$k(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n), \forall k \in K, \forall (x_1, ..., x_n) \in K^n.$$

2.- $M_{n\times m}(K) = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad | \quad a_{ij} \in K, \forall i \in \{1, ..., n\}$

$, \forall j \in \{1, .., m\}\}$ *K-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:*

Eragiketa:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{n\times m}(K).$$

Kanpoko biderketa:

$$k(a_{ij}) = (ka_{ij}), \forall k \in K, \forall (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K).$$

(iii) $P_n(K) = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \quad | \quad a_i \in K, i = 0, ..., n\}$ K-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(a_0+a_1x+...+a_nx^n)+(b_0+b_1x+...+b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_n+b_n)x^n$$

$$, \forall a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in P_n(K)$$

Kanpoko biderketa:

$$k(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = ka_0 + ka_1x + ... + ka_nx^n,$$

$$\forall k \in K, \forall a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in P_n(K).$$

Izan bedi V K-espazio bektoriala. Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

(i)$k \cdot 0_V = 0_V, \forall k \in K$.

(ii) $0_K \cdot v = 0_V, \forall v \in V$.

(iii) $k \cdot v = 0_V$ da baldin eta soilik baldin $k = 0_K$ edo $v = 0_V$ bada.

(iv) $-v = (-1_K)v, \forall v \in V$.

Izan bedi V K-espazio bektoriala. $W \subseteq V$ azpimultzo bat V-ren **azpiespazio bektoriala**, edo azpiespazioa, dela esaten da, eta $W \leq V$ denotatuko dugu, baldin eta W, V-ko eragiketa eta kanpoko biderkaketa berdinekin, K-espazio bektoriala bada. Dakigunez W V-ren azpiespazioa da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen baditu: $w_1 + w_2 \in W, \forall w_1, w_2 \in W$. eta $kw \in W, \forall k \in K, \forall w \in W$.

Adibideak 1.1.2. *(i) Izan bedi $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala orduan $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y = x\}$ azpiespazioa da baina $W' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y = x + 1\}$ ez.*

(ii) Izan bitez V K-espazio bektoriala eta $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ bektore finkoak orduan $\{k_1v_1 + ... + k_nv_n \quad | \quad k_i \in K, i = 1, .., n\}$ V-ren azpiespazioa da. Azpiespazio hau $\langle v_1, ..., v_n\rangle$ moduan denotatuko dugu eta $v_1, ..., v_n$ bektoreek sortutako azpiespazioa deitzen da.

Orokorrean, $S \subseteq V$ bada S-ko sortutako azpiespazioa honela definitzen da:

$$\langle S \rangle = \{k_1 v_1 + ... + k_n v_n \quad | \quad k_i \in K, v_i \in S, i = 1, ..., n\}$$

Froga daiteke $\langle S \rangle$ dela S barruan duen azpiespaziorik txikiena.

Izan bitez $W_1, W_2, ..., W_n$ V-ren azpiespazioak. Orduan $\cap_{i=1}^{n} W_i$ eta $W_1 + ... + W_n = \{w_1 + ... + w_n | w_i \in W_i, i = 1, ..., n\}$ V-ren azpiespazioak dira. $W_1 + ... + W_n$ azpiespazio $W_1, ..., W_n$-ren arteko `batura` deitzen da eta batura `zuzena` dela esaten da baldin eta $W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_n) = \{0_V\}$ bada $i = 1, ..., n$, eta kasu honetan $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ moduan denotatuko dugu.

Espazio bektorialetan oso garrantzitsuak dira oinarriak. β V-ren **oinarria** dela esaten da baldin eta β V-ren sistema sortzailea eta sistema askea bada.

Adibideak 1.1.3. *1.- Izan bedi $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala, definitzen ditugu $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, 1 i. tokian dugu, $i = 1, ..., n$ orduan $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat da, oinarri hau* **kanonikoa** *deitzen da eta β_k moduan denotatuko dugu.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\} \text{ espazioaren oinarri bat da.}$$

2.- Izan bedi $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y + z = 0\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazioa orduan $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ W-ren oinarri bat da.

Izan bedi $\{0_V\} \neq V$ finituki sortua. Orduan oinarri baten kardinala, aurreko teoremaren arabera berdin du ze oinarri aukeratu, V-ren **dimentsioa** deitzen da eta denotatuko dugu $dim_K V$ edo $dim V$ moduan.

Adibideak 1.1.4. *1.- Izan bedi K^n K espazio bektoriala orduan $dim K^n = n$ da.*

2.- Izan bedi $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y + z = 0\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazioa orduan $dim W = 2$ da.

Izan bedi $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria. Orduan V-ko edozein bektore β-ko bektoreen konbinazio lineal moduan era bakar batean adierazi ahal da.

Hau da, $v \in V$ bada orduan existititzen dira $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ bakarrak non $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ betetzen den, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ v-ren **koordenatuak** β **oinarriarekiko** deitzen ditzen dira eta denotatuko dugu $M_\beta(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Adibidea 1.1.5. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ *espazio bektoriala.* $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *oinarriarekiko* $M_\beta(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix}$ *da.*

Izan bitez $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V-ren bi oinarriak. Orduan $v \in V$ bektorearentzat $M_\beta(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ eta $M_{\beta'}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$ desberdinak dira. $v_i \in V$ denez eta β' V-ren oinarria, existituko dira $a_{1i}, ..., a_{ni}$ eskalar bakarrak non $v_i = a_{1i}v_1' + ... + a_{ni}v_n'$ betetzen duen $i = 1, ..., n$. Orduan

$$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrizea β oinarritik β' oinarrirako aldaketaren matrizea deitzen da eta denotatuko dugu $M_\beta^{\beta'}$.

Adibidea 1.1.6. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ *espazio bektoriala.* $\beta_k = \{e_1, e_2, e_3\}$ *eta* $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *oinarriak hartzen baditugu orduan:*

$$M_\beta^{\beta_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ eta } M_{\beta_k}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Aplikazio Lineala eta Elkartutako Matrizea

Izan bitez V eta V' K-espazio bektorialak. $f : V \to V'$ aplikazio bat **lineala** dela esango dugu hurrengo baldintzak betetzen baditu:

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$.

(ii) $f(kv) = kf(v), \forall v \in V, \forall k \in K$.

Adibidea 1.2.1. *Izan bedi $V = V' = \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala. Definitzen dugu* $\begin{array}{lccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$. *Orduan f aplikazio lineala da.*

Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala bada orduan $f(k_1v_1 + ... + k_nv_n) = k_1f(v_1) + ... + k_nf(v_n), \forall k_1, ..., k_n \in K eta \forall v_1, ..., v_n \in V$.

Izan bitez V (dim$V = n$) eta V' (dim $V' = m$) K espazio bektorialak eta $f : V \to V'$ aplikazio lineala. Izan bitez $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta V'en oinarriak hurrenez-hurren. Orduan $v = \lambda_1v_1 + ... + \lambda_nv_n$ bektorea bada

$$f(v) = (w_1...w_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ f-ri elkartutako matrizea β_V eta $\beta_{V'}$ oinarriekiko deitzen da eta denotatuko dugu $M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$.

Adibidea 1.2.2. *Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x,y,z) = (x - 3y, x + z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ den.*

1.- Izan bitez β_1 eta β_2 $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.- Izan bitez $\beta'_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ eta $\beta'_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M_{\beta'_1}^{\beta'_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Izan bitez V ($\dim V = n$) eta V' ($\dim V' = m$) K espazio bektorialak eta $f : V \to V'$ aplikazio lineala.

1.- $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta V'en oinarriak badira hurrenez-hurren orduan:

$$f(v) = (w_1 ... w_m) M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2.- $\beta'_V = \{v'_1, ..., v'_n\}$ eta $\beta'_{V'} = \{w'_1, ..., w'_m\}$ V eta V'en oinarriak badira hurrenez-hurren orduan:

$$f(v) = (w'_1 ... w'_m) M_{\beta'_V}^{\beta'_{V'}}(f) \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}.$$

Orduan:

$$f(v) = (w'_1 ... w'_m) M_{\beta_{V'}}^{\beta'_{V'}} M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) M_{\beta'_V}^{\beta_V} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}.$$

Ondorioz elkartutako matrizea bakarra denez hurrengo erlazioa frogatu dugu:

$$M_{\beta_{V'}}^{\beta'_{V'}} M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) M_{\beta'_V}^{\beta_V} = M_{\beta'_V}^{\beta'_{V'}}(f).$$

Adibidea 1.2.3. *Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x,y,z) = (x-3y, x+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ den. Izan bitez β_1 eta β_2 $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoak hurrenez-hurren. Aurreko adibidiean ikusi bezala*

$$M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izan bitez ${\beta'}_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *eta* ${\beta'}_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ *eta* $\mathbb{R}^2$*-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:*

$$M_{{\beta'}_1}^{{\beta'}_2}(f) = M_{\beta_2}^{\beta'_2} M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) M_{{\beta'}_1}^{\beta_1}$$

Beraz:

$$M_{{\beta'}_1}^{{\beta'}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Endomorfismo eta Matrize Karratu baten Balio eta Bektore Propioak

Izan bedi $f \in End(V)$. $\lambda \in K$ f-ren **balio propioa** dela esaten da existitzen bada $v \in V - \{0\}$ non $f(v) = \lambda v$ betetzen den. Kasu honetan, v λ-ri elkartutako **bektore propioa** dela esaten da.

Adibidea 1.3.1. *Izan bedi* $f \in End(\mathbb{R}^3)$ *non* $f(x,y,z) = (x+y, y, y+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Ikus dezagun $\lambda = 0$ f*-ren balio propio bat den ala ez. Definizioaren arabera, existitu behar da* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ *non* $f(x,y,z) = 0 \cdot (x,y,z)$ *betetzen den. Hau da aurkitu behar dugu hurrengo sistema homogeneoaren soluzio ez-nulu bat.*

$$\begin{cases} x+y & = & 0 \\ y & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{cases}$$

Argi eta garbi, sistemaren soluzio bakarra $(0,0,0)$ *beraz* $\lambda = 0$ *ez da* f*-ren balio propioa.*

(ii) Ikus dezagun $\lambda = 1$ f*-ren balio propio bat den ala ez. Definizioaren arabera, existitu behar da* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ *non* $f(x,y,z) = 1 \cdot (x,y,z)$ *betetzen den. Hau da aurkitu behar dugu hurrengo sistemaren soluzio ez-nulua*

$$\begin{cases} x+y & = & x \\ y & = & y \\ y+z & = & z \end{cases}$$

Sistemaren soluzioen multzoa $\{(x,0,z) \quad | \quad x,z \in \mathbb{R}\}$ *da eta beraz, badaude bektore ez-nuluak. Honek frogatzen du* $\lambda = 1$ f*-ren balio propioa dela eta bestalde* $(x,0,z)$ *moduko bektore ez-nulu guztiak* 1 *balio propioari elkartutako bektore propioak dira.*

Oharra 1.3.2. *Gogoratu* $\lambda = 0$ *balio propioa izan ahal dela baina* $v = 0_V$ *ez dela inoiz bektore propioa.*

Balio propioei lotuta hurrengo azpiespazioa dugu:

$$V(\lambda) = \{v \in V \quad | \quad f(v) = \lambda \cdot v\}$$

Orduan $V(\lambda)$ V-ren azpiespazioa da eta λ-ri elkartutako azpiespazio propioa deitzen da. Gogoratu azpiespazio hau f-aldagaitza dela eta $M_{\beta_{V(\lambda)}}(f|V(\lambda)) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ diagonala da.

Adibidea 1.3.3. *Izan bedi* $f \in End(\mathbb{R}^3)$ *non* $f(x,y,z) = (x+y, y, y+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Orduan* $V(1) = \langle (1,0,0),(0,0,1) \rangle$ *dugu.*

Era berean matrize karratu baten kasuan.

Izan bedi $A \in M_n(K)$ karratua. $\lambda \in K$ f-ren **balio propioa** dela esaten da baldin eta existitzen bada $(a_1,...,a_n) \in K^n - \{(0,...,0)\}$ non:

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Kasu honetan, $(a_1,...,a_n)$ λ-ri elkartutako **bektore propioa** dela esaten da.

Oharra: $f \in End(V)$ bada eta β V-ren oinarria bada orduan, definizioaren arabera, f-ren balio propioak eta $M_\beta(f)$ matrizearen balio propioak berberak dira.

Izan bitez $A \in M_n(K)$ eta $\lambda \in K$ A-ren balio propioa. Definitzen dugu hurrengo multzoa:

$$V(\lambda) = \{(x_1,...,x_n) \in K^n \quad | \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\}$$

Orduan $V(\lambda)$ K^n-ren azpiespazio da eta λri elkartutako azpiespazio propioa deitzen da.

Adibidea 1.3.4. *Izan bedi* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *matrizea. Orduan* 5 *balio propioa da eta* $V(5)$ *lortzeko hurrengo sistema homogeneoa ebatzi behar dugu:*

$$\begin{cases} -6y + 6z & = & 0 \\ 3x - 3y & = & 0 \end{cases}$$

Beraz $V(5) = \langle (1,1,1) \rangle$ *da.*

1.4 Polinomio Karkateristikoa

Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratua. Orduan A-ren **polinomio karakteristikoa** $\chi_A(x)$ hurrengo determinantea da:

$$det(XI_n - A)$$

Adibidea 1.4.1. *Izan bedi* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Orduan* $\chi_A(x) = (x-5)(x+1)(x-2)$ *da.*

Gogoratu $A \in M_n(K)$ eta $\lambda \in K$: λ A-ren balio propioa da baldin eta soilik baldin λ $\chi_A(x)$ polinomioaren erroa bada.

Aurreko adibideko matrizearen kasuan, bere balio propioak $5, -1$ eta 2 dira.

Izan bitez A eta B matrize antzekoak (hau da, existitzen da P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = B$ den) orduan $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ betetzen da. Bestalde, gogoratu endomorfismo bati elkartutako matrizeak (oinarria errepikatzen dugunean) antzekoak direla. Beraz, zentzua du hurrengo definizioak:

Definizioa 1.4.2. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta β V-ren oinarria. f-ren* **polinomio karakteristikoa**, *$\chi_f(x)$ moduan adieraziko duguna, $M_\beta(f)$ matrizearen polinomio karakteristikoa da. Hau da:*

$$\chi_f(x) = det(xI_n - M_\beta(f)).$$

Adibidea 1.4.3. *Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^3)$ non:*

$$f(x, y, z) = (x + y, y, y + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zein da f-ren polinomio karakteristikoa? Definizioaren arabera hurrengo determinantea kalkulatu behar dugu:

$$\chi_f(x) = \chi_{M_{\beta_k}(f)} = det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3$$

Orain berehalakoa da ikustea: λ f-ren balio propioa da baldin eta soilik baldin λ $\chi_f(x)$ polinomioaren erroa bada.

Propietate guzti hauek sakonki azalduta daude Aljebra Linealerako Sarrera irakasgaian.