Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea | CAMPUS OF INTERNATIONAL EXCELLENCE

5. Gaia

Erregresio Lineal Orokorreko Eredua

Estimazioa

Pilar González eta Susan Orbe

Ekonomia Aplikatua III (Ekonometria eta Estatistika) Saila

Ikasketa-emaitzak

- Eredu ekonometriko bat estimatu eskuragarri den lagineko informazioarekin.
- Eredu lineal orokorreko ereduaren koefiziente estimatuak interpretatu.
- Lagin erregresio-funtzioaren propietateak frogatu.
- Doikuntzaren ontasun-irizpideak desberdindu.
- Eredu ekonometriko bat estimatu laginatik kanpo dagoen informazioa kontuan izanik.
- KTA estimatzailearen propietateak lortu testuinguru desberdinetan.

Edukia.

Edukia.

ELOEren estimazioa.

Helburua.

Erregresio Lineal Orokorreko Eredu bat estimatzea eskuragarri dagoen lagineko informazioarekin:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \ldots, N \quad u_i \sim NIB(0, \sigma^2)$$

- Y: aldagai azaldua edo dependentea.
- X_j, $j = 2, \ldots, k$: erregresoreak.
- β_j, $j = 2, \ldots, k$: koefiziente ezezagunak.
- u: perturbazio aleatorio ez behagarria.
- i: behaketaren azpi-indizea datu gurutzatuetan (denborazko serietan t).
- N: lagin-tamaina (denborazko serietan T).

ELOEren estimazioa.

Erregresio lineal orokorreko ereduaren zehaztapen orokorra.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \ldots, N. \quad u_i \sim NIB(0, \sigma^2)$$

Azalpen batzuk:

- Zehaztapen orokorrarekin lan egingo da notazioa, frogapenak eta kalkuluak errazteko.
- Zehaztapen horrek orain arte ikusitako eta koefizienteekiko linealak diren eredu guztiak barneratzen ditu.
- X_j, $j = 2, \ldots, k$, aldagai azaltzaile kuantitatiboak, aldagai horien eraldakuntzaren bat (karratuak, logaritmoak, ...), fikzio-aldagaia, aldagaien arteko biderkadura, ..., izan daiteke
- Koefizienteen interpretazioa X_j-ren ezaugarrien mendekoa da.

ELOEren estimazioa.

Erregresio lineal orokorreko eredua:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Behaketa bakoitzarentzat:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} Y_1 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_k X_{k1} + u_1 & i = 1 \\ Y_2 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_k X_{k2} + u_2 & i = 2 \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ Y_i & = & \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i & i = i \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ Y_N & = & \beta_1 + \beta_2 X_{2N} + \beta_3 X_{3N} + \ldots + \beta_k X_{kN} + u_N & i = N \end{array} \right.$$

ELOEren estimazioa.

Askotan ereduaren adierazpen matriziala erabiliko da, batez ere interesgarriak diren frogapenetan.

ELOEren adierazpen matriziala.

$$Y = X\beta + u$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2i} & X_{3i} & \cdots & X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2N} & X_{3N} & \cdots & X_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

Edukia.

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailea.

Populazioko erregresio-funtzioaren, koefiziente ezezagunak estimatu nahi dira, hau da, aldagai azalduaren batezbesteko portaera jasotzen duen funtzioaren koefizienteak.

$$E(Y_i|X) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki}$$

Koefizienteak estimatuz, **Lagineko Erregresio-Funtzioa (LEF)** lortzen da:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k X_{ki}.$$

Egin den estimazio-erroreari **hondarra** deitzen zaio:

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = \hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ki}.$$

Errore hori ereduko perturbazioaren eta koefizienteak estimatzean egindako errorearen funtzioan dago:

$$\hat{u}_i = u_i + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) + \ldots + (\beta_k - \hat{\beta}_k) X_{ki}$$

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailea.

KTA estimatzailea.

KTA estimatzailea honako helburu funtzio hau minimizatuz lortzen da:

$$min_{\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k} \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2 \quad = \quad min_{\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ki})^2$$

Minimizazioarako lehen ordenako baldintzak.

Koefizienteekiko lehen deribatu partzialak zerora berdinduz:

$$\left. \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} \right|_{\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1^{KTA}} = 0, \quad \ldots, \quad \left. \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_k} \right|_{\hat{\beta}_k = \hat{\beta}_k^{KTA}} = 0$$

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailea.

Lortzen diren lehen ordenako baldintzak hauek dira:

$$\left.\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1}\right|_{\hat{\beta}_1=\hat{\beta}_1^{KTA}} = -2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ki}) = 0$$

$$\left.\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2}\right|_{\hat{\beta}_2=\hat{\beta}_2^{KTA}} = -2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ki})X_{2i} = 0$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_k}\right|_{\hat{\beta}_k=\hat{\beta}_k^{KTA}} = -2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ki})X_{ki} = 0$$

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailea.

Ekuazio normalak.

Minimizazioaren lehen ordenako baldintzeetatik lortutako ekuazioen sistema, "ekuazio normalak" bezala ezagutzen dira.

$$\begin{aligned}
\sum Y_i &= N\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki} \\
\sum X_{2i} Y_i &= \hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + \ldots + \hat{\beta}_k \sum X_{2i} X_{ki} \\
\vdots \quad &\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\sum X_{ki} Y_i &= \hat{\beta}_1 \sum X_{ki} + \hat{\beta}_2 \sum X_{ki} X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2 .
\end{aligned}$$

Ekuazio normalak k ezezaguneko eta k ekuazioduneko sistema bat dira. KTA estimatzailea ekuazio horiek askatuz lortzen da.

Bigarren ordenako baldintzak emanik, minimo bat dela baiezta daiteke.

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailea.

KTA estimatzailearen adierazpen matriziala.

Helburu-funtzioa: $min_{\hat{\beta}} \hat{u}'\hat{u} = min_{\hat{\beta}} (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}).$

Lehen ordenako baldintzak:

$$\frac{\partial \hat{u}'\hat{u}}{\partial \hat{\beta}}\Big|_{\hat{\beta}=\hat{\beta}^{KTA}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2X'(Y - X\hat{\beta}_{KTA}) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'\hat{u}_{KTA} = 0.$$

Ekuazio normalak: $X'Y = X'X\hat{\beta}_{KTA}.$

Bigarren ordenako baldintzak:

$$\frac{\partial \hat{u}'\hat{u}}{\partial \hat{\beta}\partial \hat{\beta}'}\Big|_{\hat{\beta}=\hat{\beta}^{KTA}} = 2X'X \quad \text{matrize erdi-definitu positiboa da beti.}$$

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailea.

KTA estimatzailea.

Ekuazio normalak askatuz KTA estimatzailearen adierazpena lortzen da:

$$\hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$X'X = \begin{bmatrix} N & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \cdots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \\ \sum X_{3i}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki}Y_i \end{bmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

Aplikazioak **5.1** eta **5.2 Adibideetan.**

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailea.

Batzutan adierazpen matrizialarekin ariko gara eta beste batzutan ez, hori dela eta, adierazpen batzuen baliokidetasuna eskaintzen da taula honetan:

i behaketa	Matrizialki
$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_K X_{ki} + u_i$	$Y = X\beta + u$
$E(Y_i\|X) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki}$	$E(Y\|X) = X\beta$
$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_K X_{ki}$	$\hat{Y} = X\hat{\beta}$
$u_i = Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{2i} - \ldots - \beta_k X_{ki}$	$U = Y - X\beta$
$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$	$\hat{U} = Y - \hat{Y}$
$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_K X_{ki}$	$\hat{U} = Y - X\hat{\beta}$
$\hat{u}_i = u_i + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) + \ldots + (\beta_k - \hat{\beta}_k) X_{ki}$	$\hat{U} = U + X(\beta - \hat{\beta})$

Edukia.

ELOEren estimazioa: LEF.

LEFren propietateak: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k X_{ki}$

1. Hondarren batezbesteko aritmetikoa zero da: $\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i = 0.$
2. Hondarrak eta erregresoreak ortogonalak dira: $\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i X_{ji} = 0$

Frogapena:

Ekuazio normalen adierazpen matrizialetik:

$$X'(Y - X\hat{\beta}) = X'\hat{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sum_1^N \hat{u}_i \\ \sum_1^N X_{2i}\hat{u}_i \\ \sum_1^N X_{3i}\hat{u}_i \\ \vdots \\ \sum_1^N X_{ki}\hat{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N \hat{u}_i X_{ji} = 0, \ \forall j \end{cases}$$

ELOEren estimazioa: LEF.

3. Hondarrak eta aldagai azaldu estimatua ortogonalak dira: $\hat{Y}'\hat{u} = 0$.

Frogapena:

$$\hat{Y}'\hat{u} = (X\hat{\beta})'\hat{u} = \hat{\beta}' \underbrace{X'\hat{u}}_{=0} = 0$$

4. Y-ren eta $\hat{Y}$-ren lagin batezbestekoak berdinak dira: $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$.

Frogapena:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y_i &= \hat{Y}_i + \hat{u}_i \\ \sum Y_i &= \sum \hat{Y}_i + \underbrace{\sum \hat{u}_i}_{=0} \\ \frac{1}{N}\sum Y_i &= \frac{1}{N}\sum \hat{Y}_i \qquad \Rightarrow \qquad \bar{Y} = \bar{\hat{Y}} \end{aligned}$$

ELOEren estimazioa: LEF.

5. LEF batezbestekoen puntutik pasatzen da $(\bar{Y}, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k)$.

Frogapena:

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ki}) = 0$$

$$\sum Y_i - N\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_k \sum X_{ki} = 0$$

$$\sum Y_i = N\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki}$$

$$\frac{1}{N} \sum Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \frac{1}{N} \sum X_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k \frac{1}{N} \sum X_{ki}$$

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 + \ldots + \hat{\beta}_k \bar{X}_k$$

Edukia.

ELOEren estimazioa: KTA estimatzaile baldintzatuaren propietateak.

KTA estimatzailearen propietateak: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$

1. **Linealtasuna**: X-i baldintzatutako KTA estimatzailea Y aldagai azalduaren konbinazio lineal bat da, eta ondorioz, baita perturbazioen konbinazio lineal bat ere.

Frogapena H1 eta H2 betetzen direlako suposiziopean:

$$\hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$

2. **Alboragabetasuna**: $E(u|X) = 0$ denez, $\hat{\beta}_{KTA}$ alboragabea da, hau da, bere esperotako balioa benetako balioa da.

Frogapena H1, H2 eta H3 betetzen direlako suposiziopean:

$$E(\hat{\beta}|X) = E(\beta + (X'X)^{-1}X'u|X) = \beta$$

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailearen propietateak.

3. **Bariantza**:

Frogapena H1, H2, H3 eta H4 betetzen direlako suposiziopean:

$$\begin{aligned}
Bar(\hat\beta|X) &= E[(\hat\beta - E(\hat\beta|X))(\hat\beta - E(\hat\beta|X))'|X] = E[(\hat\beta-\beta)(\hat\beta-\beta)'|X] = \\
&= E\left[\left[(X'X)^{-1}X'u\right]\left[(X'X)^{-1}X'u\right]'|X\right] = \\
&= E[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}|X] = \sigma^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}$$

Notazioa errazteko, bariantza- eta kobariantza matrizea honela adieraziko da:

$$\begin{aligned}
Bar(\hat\beta) &= E[(\hat\beta - E(\hat\beta|X))(\hat\beta - E(\hat\beta|X))'|X] = \\
&= \begin{bmatrix} Bar(\hat\beta_1) & Kob(\hat\beta_1,\hat\beta_2) & \cdots & Kob(\hat\beta_1,\hat\beta_k) \\ Kob(\hat\beta_2,\hat\beta_1) & Bar(\hat\beta_2) & \cdots & Kob(\hat\beta_2,\hat\beta_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Kob(\hat\beta_k,\hat\beta_1) & Kob(\hat\beta_k,\hat\beta_2) & \cdots & Bar(\hat\beta_k) \end{bmatrix} = \sigma^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}$$

ELOEren estimazioa: KTA estimatzailearen propietateak.

Lortutako bariantza, estimatzaile lineal eta alboragabe guztien artetik **bariantzarik txikienekoa** da.

Gauss-Markov Teorema

Erregresio ereduko H1-H5 oinarrizko hipotesiak betetzen direlako suposiziopean:

"KTA estimatzailea, $\hat{\beta}_{KTA}$, estimatzaile efizientea da, hau da, linealak eta alboragabeak diren estimatzaile mota guztietatik, baldintzatutako bariantza txikieneko estimatzailea da."

Oharra: X_j aldagaiak estokastikoak izan daitezkenez, estimatzailearen analisi guztia baldintzatua da nahiz eta batzutan espreski ez adierazi.

ELOEren estimazioa.

KTA hondarrak.

KTA hondarrak perturbazioen funtzioan idatzi daitezke:

$$\hat{u} = Mu$$

non M matrizea N ordenakoa, simetrikoa ($M = M'$), idenpotentea ($MM = M$), h(M)= tr(M)= $N - K$ eta X-rekiko ortogonala ($MX = 0$) den.

Frogapena:

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta} = Y - X(X'X)^{-1}X'Y = \\
&= [I_N - X(X'X)^{-1}X']Y = [I_N - X(X'X)^{-1}X'](X\beta + u) = \\
&= X\beta - X(X'X)^{-1}X'X\beta + [I_N - X(X'X)^{-1}X']u = \\
&= \underbrace{[I_N - X(X'X)^{-1}X']}_{=M} u = Mu
\end{aligned}$$

ELOEren estimazioa: propietateak.

KTA hondarren propietateak: $\hat{u} = Mu$

1. Hondarren baldintzatutako batezbestekoa zero da.

Frogapena:

$$E(\hat{u}|X) = ME(u|X) = M\ 0 = 0$$

2. Hondarrak heterozedastikoak eta korrelatuak dira nahiz eta perturbazioak homozedastikoak eta korrelatu gabeak izan.

Frogapena:

$$\begin{aligned} Bar(\hat{u}|X) &= E(\hat{u}\hat{u}'|X) = E(Muu'M'|X) = \\ &= M\sigma^2 I_N M = \sigma^2 M \quad \rightarrow \quad M \neq I \end{aligned}$$

ELOEren estimazioa.

Perturbazioaren bariantzaren estimatzailea, σ^2.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{N-k} = \frac{HKB}{N-k} = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N-k}$$

Frogapena:

Perturbazioaren bariantzaren estimatzaile baldintzatua alboragabea da:

$$E(\hat{\sigma}^2|X) = \frac{E(\hat{u}'\hat{u}|X)}{N-k} = \frac{\sigma^2(N-k)}{N-k} = \sigma^2$$

Honakoagatik:

$$\begin{aligned}
E(\hat{u}'\hat{u}|X) &= E(u'Mu|X) = E(tr(u'Mu)|X) = E(tr(Muu')|X) = \\
&= tr(E(Muu'|X)) = tr(ME(uu'|X)) = tr(M\sigma^2 I_N) = \\
&= \sigma^2 tr(M) = \sigma^2(N-k)
\end{aligned}$$

ELOEren estimazioa.

$\hat{\beta}_{KTA}$ estimatzailearen bariantza- eta kobariantza-matrize baldintzatua.

$$\widehat{Bar}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \widehat{Bar}(\hat{\beta}_1) & \widehat{Kob}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & \widehat{Kob}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \widehat{Kob}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \widehat{Bar}(\hat{\beta}_2) & \cdots & \widehat{Kob}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{Kob}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \widehat{Kob}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & \widehat{Bar}(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix} = \widehat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$$

Edukia.

ELOEren estimazioa: balioespena.

Karratuen baturaren deskonposaketa.

$$KBT = KBA + HKB$$

KBT: Karratuen Batura Totala.

KBA: Karratuen Batura Azaldua.

HKB: Hondar Karratuen Batura.

Analitikoki:

$$\begin{aligned} KBT &= \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = Y'Y - N\bar{Y}^2 \\ KBA &= \sum (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2 = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - N\bar{\hat{Y}}^2 \\ HKB &= \sum \hat{u}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \hat{u}'\hat{u} = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y \end{aligned}$$

ELOEren estimazioa: balioespena.

Doikuntza-neurriak.

Mugatze-koefizientea: $R^2 = \dfrac{KBA}{KBT}$.

R^2, aldagai azaltzaileen aldagarritasunarekin aldagai azalduaren aldagarritasunaren zenbateko proportzioa lortzen den era lineal batean, nuertzen duen irizpidea da.

Erregresio ereduak termino konstantea baldin badu, beste era honetara ere kalkulatu daiteke: $R^2 = 1 - \dfrac{HKB}{KBT} \in (0,1)$

Kontuz: Gretl programak horrela kalkulatzen du!!

Mugatze-koefiziente zuzendua: $\bar{R}^2 = 1 - \dfrac{N-1}{N-k} R^2$.

Erregresioaren doikuntza neurri horrek mugatze koefizientea askatasun graduekiko zuzendu egiten du, estimatzen diren koefiziente kopurua kontuan izateko. Neurri horrek ez du zuzeneko interpretaziorik.

ELOEren estimazioa: balioespena.

Errore-irizpideak.

Ondoren erakusten diren irizpideek, hondar karratuen baturaren balioa askatasun graduekiko doitzen dituzten irizpideak dira.

Log-egiantza: $\ell(\hat{\theta}) = \frac{N}{2}(1 + \ln 2\pi - \ln N) - \frac{N}{2} \ln HKB.$

Akaike irizpidea: $AIC = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k.$

Schwarz irizpidea: $BIC = -2\ell(\hat{\theta}) + k \ln N.$

Hannan-Quinn irizpidea: $HQC = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k \ln \ln N.$

Errore-irizpideak direnez, balio horiek zenbat eta txikiagoak izan, hobe. Erregresio ereduak alderatzeko baliagarriak dira baldin eta soilik badlin ereduak gaineratuak badira.

Edukia.

ELOEren estimazioa: Karratu Txikienen Murriztuak (KTM).

Helburua.

Erregresio-eredu orokor bat estimatzea koefizientei buruzko informazio gehigarria kontuan izanez:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \ldots, N. \quad u_i \sim NIB(0, \sigma_u^2).$$

Karratu Txikienen Murriztuen (KTM) estimatzailea hau da:

$$\hat{\beta}_{KTM} = (X'_M X_M)^{-1} X'_M Y_M$$

non X_M eta Y_M eredu murriztuko datu-matrizea eta aldagaia azaldua diren, hau da, hasierako ereduan koefizientei buruzko informazioa barneratzean lortzen den eredukoak.

Aplikazioa **5.3 Adibidean.**

ELOEren estimazioa: KTM.

Propietateak.

$$\hat{\beta}_{KTM} = (X'_M X_M)^{-1} X'_M Y_M$$

Estimatzaile horren X-i baldintzatutako propietateak hauek dira:

- Lineala perturbazioekiko.
- Alboragabea baldin eta soilik baldin barneratutako informazioa egiazkoa bada.
- KTA estimatzaileak duen bariantza baino bariantza txikiagokoa da, nahiz eta barneratutako informazioa egiazkoa ez izan.

Ondorioz, barneratutako informazioa egiazkoa bada, KTM aplikatuko da KTA aplikatu beharrean zeren biak linealak eta alboragabeak baitira, baina bien artetik KTM estimatzaileak baitu bariantza txikiena.

ELOEren estimazioa: KTM.

Lehen adibidea.

Estimatu nahi den eredua:

$$pizza_i = \beta_1 + \beta_2 errenta_i + \beta_3 adina_i + u_i \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Kontuan hartu nahi den informazioa: $\beta_2 = -\beta_3$

Eredu murriztua:

$$pizza_i = \beta_1 + \beta_2 (errenta_i - adina_i) + u_i$$

$$X_M = \begin{pmatrix} 1 & errenta_1 - adina_1 \\ 1 & errenta_2 - adina_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & errenta_N - adina_N \end{pmatrix} \quad Y_M = \begin{pmatrix} pizza_1 \\ pizza_2 \\ \vdots \\ pizza_N \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{KTM} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta}_3^{KTM} = -\hat{\beta}_2^{KTM}$$

Bigarren adibidea.

Estimatu nahi den eredua:

$$pizza_i = \beta_1 + \beta_2 errenta_i + \beta_3 adina_i \times errenta_i + u_i \quad i = 1, ..., N$$

Kontuan hartu nahi den informazioa: $\beta_2 = 5$.

Eredu murriztua:

$$pizza_i - 5errenta_i = \beta_1 + \beta_3 edad_i renta_i + u_i$$

$$X_M = \begin{pmatrix} 1 & adina_1 \times errenta_1 \\ 1 & adina_2 \times errenta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & adina_N \times errenta_N \end{pmatrix} \quad Y_M = \begin{pmatrix} pizza_1 - 5errenta_1 \\ pizza_2 - 5errenta_2 \\ \vdots \\ pizza_N - 5errenta_N \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{KTM} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta}_2^{KTM} = 5$$

ELOEren estimazioa: KTM.

Hirugarren adibidea.

Estimatu nahi den eredua:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X2_t + \beta_3 X3_t + \beta_4 X4_t + u_t \quad t = 1, ...T$$

Kontuan hartu nahi den informazioa: $\beta_3 + \beta_4 = 1$.

Eredu murriztua: $$Y_t - X4_t = \beta_1 + \beta_2 X2_t + \beta_3 (X3_t - X4_t) + u_t$$

$$X_M = \begin{pmatrix} 1 & X2_1 & X3_1 - X4_1 \\ 1 & X2_2 & X3_2 - X4_2 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & X2_T & X3_T - X4_T \end{pmatrix} \quad Y_M = \begin{pmatrix} Y_1 - X4_1 \\ Y_2 - X4_2 \\ \vdots \\ Y_T - X4_T \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{KTM} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_4 \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta}_4^{KTM} = 1 - \hat{\beta}_3^{KTM}$$

ELOEren estimazioa: KTM.

Laugarren adibidea.

Estimatu nahi den eredua:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X3_t + \beta_3 X3_t^2 + \beta_4 time + u_t$$

Kontuan hartu nahi den informazioa: $\beta_2 = \beta_3 = 0$.

Eredu murriztua: $$Y_t = \beta_1 + \beta_4 time + u_t$$

$$X_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix} \quad Y_M = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{KTM} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_4 \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta}_2^{KTM} = \hat{\beta}_3^{KTM} = 0$$

ELOEren estimazioa: KTM.

Aldagai nabari baten omisioa.

Demagun erregresio lineal orokorreko ereduan

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

X_2 aldagaia omititzen dugula, hau da, $\beta_2 = 0$ gezurrezko murrizketa barneratu eta murriztutako eredua estimatzen dugula:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Orduan, KTM estimatzailea, $\hat{\beta}_{KTM} = (X'_M X_M)^{-1} X'_M Y_M$, Xri baldintzatutako honako propietate hauek izango ditu:

- Lineala perturbazioekiko.
- ALBORATUA barneratutako informazioa EZ delako egiazkoa.
- KTA estimatzaileak baino bariantza txikiagoa.

ELOEren estimazioa: KTM.

Aldagai ez nabari baten barnerapena.

Demagun erregresio lineal orokorreko ereduan

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

$\beta_2 = 0$ betetzen dela dakigula, hau da, X_2 erregresorea ez dela nabaria, baina estimatzean informazio hori ez erabiltzea erabaki dela. Orduan, KTA estimatzailea, $\hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1}X'Y$, X -i baldintzatutako honako propietate hauek izango lituzke:

- Lineala perturbazioekiko.
- Alboragabea.
- Estimatzaile lineal eta alboragabeen artean, bariantza txikienekoa.

BAINA, estimatzailearen bariantza txikiago bat lortzeko aukera izango genuke $\beta_2 = 0$ egiazko murrizketa barneratuko bagenu.

Edukia.

Estimazio-emaitzak.

Adibidea: pizza kontsumoa.

Eskuragarri dagoen `pizza.gdt` fitxategian, N banakoen pizza-kontsumoaren (urteko dolarretan) datuak daude eta baita banako horien ezaugarri batzuena ere:

- Urteko errenta (mila dolarretan).
- Bezeroaren adina (urtetan).
- Generoa (gizona, emakumea).
- Ikasketa maila (oinarrizkoak, batxilergoa, gradukoa, graduondokoa)

Eredu horretan pizza kontsumoa, errenta eta adinaren funtzioa dela zehazten da, Gretl irteerak ematen duen informazioa azaltzeko asmoarekin.
Analisi hau zehaztasunez egiten da **5.1 Adibidean.**

Estimazio-emaitzak.

Zehaztatutako erregresio lineal orokorreko eredua:

$$pizza_i = \beta_1 + \beta_2\, errenta_i + \beta_3\, adina_i + u_i \quad i = 1, ..., N$$

- $pizza$: aldagai azaldua (pizza kontsumoa).
- $errenta$: aldagai azaltzaile kuantitatiboa.
- $adina$: aldagai azaltzaile kuantitatiboa.
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$: koefizienteak.
- u: perturbazio aleatorioa.
- N: lagineko banakoen kopurua.
- i: behaketa adierazteko erabiltzen den azpi-indizea.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1 –40 behaketak erabiliz
Aldagai azaldua: pizza

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-arrazoia	p-balioa
const	342,885	72,3434	4,7397	0,0000
errenta	1,83248	0,464301	3,9467	0,0003
adina	−7,57556	2,31699	−3,2696	0,0023

Ald. azalduaren bbkoa	191,5500	Ald. azalduaren Desb. Tip.	155,8806
Hondar Karratuen Batura	635636,7	Erregresioaren Desb. Tip.	131,0701
R^2	0,329251	R^2 zuzendua	0,292994
$F(2, 37)$	9,081100	P-balioa(F)	0,000619
Log-egiantza	−250,2276	Akaike Irizpidea	506,4552
Schwarz Irizpidea	511,5218	Hannan–Quinn	508,2871

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1 –40 behaketak erabiliz
Aldagai azaldua: pizza

Gretl programak ateratzen duen irteeraren goiburuan informazio hau agertzen da:

Eredua 1 → programa irekia izan denetik, estimatu den lehen eredua.

KTA → erabilia izan den estimazio metodoa.

1 –40 behaketak erabiliz → erabilitako laginak 40 behaketa dituela.

Aldagai azaldua: pizza → erregresio-eredu horretako aldagai azaldua $pizza$ dela.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1 –40 behaketak erabiliz
Aldagai azaldua: pizza

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-arrazoia	p-balioa
const	342,885	72,3434	4,7397	0,0000
errenta	1,83248	0,464301	3,9467	0,0003
adina	−7,57556	2,31699	−3,2696	0,0023

Lehen zutabeak, ereduan barneratu izan diren erregresoreak agertzen dira. Erregresore horiek, kuantitatiboak, fikziozkoak edota aldagaien eraldakuntzak izan daitezke. X datu matrizean agertzen diren zutabeak dira. Adibidean: termino konstantea, errenta eta adina.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1 –40 behaketak erabiliz
Aldagai azaldua: pizza

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-arrazoia	p-balioa
const	**342,885**	72,3434	4,7397	0,0000
errenta	**1,83248**	0,464301	3,9467	0,0003
adina	$-$**7,57556**	2,31699	$-$3,2696	0,0023

Bigarren zutabean, KTA estimatzailearekin, $\hat{\beta}_{KTA} = (X'X)^{-1}X'Y$, lortutako koefizienteen estimazioak agertzen dira.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1 –40 behaketak erabiliz
Aldagai azaldua: pizza

	Koefizientea	**Desb. Tipikoa**	t-arrazoia	p-balioa
const	342,885	**72,3434**	4,7397	0,0000
errenta	1,83248	**0,464301**	3,9467	0,0003
adina	−7,57556	**2,31699**	−3,2696	0,0023

Hirugarren zutabean, KTA estimatzailearen desbiderazio tipiko estimatuak agertzen dira: $\widehat{desb}(\hat{\beta}_j) = \hat{\sigma}\sqrt{a_{ii}}$ non a_{ii} terminoa $(X'X)^{-1}$ren (i,i) elementua den.
Hau da, estimazio horiek bariantza- eta kobariantza-matrizearen diagonal nagusiko elementuen erro karratuak dira: $\widehat{Bar}_X(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ non $\hat{\sigma}^2 = HKB/(N-k)$ den.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1 –40 behaketak erabiliz
Aldagai azaldua: pizza

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-**arrazoia**	**p-balioa**
const	342,885	72,3434	**4,7397**	**0,0000**
errenta	1,83248	0,464301	**3,9467**	**0,0003**
adina	−7,57556	2,31699	−**3,2696**	**0,0023**

Azken bi zutabeetan, t-estatistikoak eta p-balioak agertzen dira. Informazio hori, 6. gaian ikusiko den bezala, baliagrarria da hipotesien kontrasteak egiteko.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Ald. azalduaren bbkoa	191,5500	Ald. azalduaren Desb. Tip.	155,8806
Hondar Karratuen Batura	**635636,7**	Erregresioaren Desb. Tip.	131,0701
R^2	**0,329251**	R^2 **zuzendua**	**0,292994**
$F(2, 37)$	9,081100	P-balioa(F)	0,000619
Log-egiantza	**−250,2276**	**Akaike Irizpidea**	**506,4552**
Schwarz Irizpidea	**511,5218**	**Hannan–Quinn**	**508,2871**

Gretl irteeraren behealdean agertzen den informazioa anitza da. Alde batetik doikuntzarekin zerikusiak dutenak: hondar karratuen batura, doikuntza-neurriak eta errore-irizpide batzuk.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Ald. azalduaren bbkoa	**191,5500**	**Ald. azalduaren Desb. Tip.**	**155,8806**
Hondar Karratuen Batura	635636,7	**Erregresioaren Desb. Tip.**	**131,0701**
R^2	0,329251	R^2 zuzendua	0,292994
$F(2,37)$	9,081100	P-balioa(F)	0,000619
Log-egiantza	−250,2276	Akaike Irizpidea	506,4552
Schwarz Irizpidea	511,5218	Hannan–Quinn	508,2871

Aldagai azalduaren eta hondarren aldagaien lagin-momentuak agertzen dira.
Aldagai azalduaren batezbestekoa= 191,5500 $\rightarrow \overline{pizza} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} pizza_i$

Aldagai azalduaren desbideratze tipikoa= 155,8806 $\rightarrow$
$S_{pizza} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(pizza_i - \overline{pizza})^2}$

Erregresioaren desbideratze tipikoa = 131,0701 $\rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{HKB}{N-k}}$

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Ald. azalduaren bbkoa	191,5500	Ald. azalduaren Desb. Tip.	155,8806
Hondar Karratuen Batura	635636,7	Erregresioaren Desb. Tip.	131,0701
R^2	0,329251	R^2 zuzendua	0,292994
F(2, 37)	**9,081100**	**P-balioa(F)**	**0,000619**
Log-egiantza	−250,2276	Akaike Irizpidea	506,4552
Schwarz Irizpidea	511,5218	Hannan–Quinn	508,2871

Azkenik, kontrasteak egiteko (6. gaian zehaztasun gehiagoz ikusiko da) baliagarriak diren emaitzak ere agertzen dira.

Estimazio-emaitzak.

Adibidea. Oilasko kontsumoa.

Eskuragarri dagoen `oilasko.gdt` fitxategian oilaskoaren urteroko kontsumoaren (kilotan) eta bere eboluzioan eragin zezaketen faktore batzuen informazioa dago:

- $X2$: Errenta erreal per capita erabilgarria (eurotan).
- $X3$: Oilasko-okelaren prezioa kiloko eurotan.
- $X4$: Txerri-okelaren prezioa kiloko eurotan.
- $X5$: Txahalkiaren prezioa kiloko eurotan.
- Hegazti-gripearen epealdia (1999-2003)

Eredu horretan oilasko kontsumoa, errentaren eta lehiako ondasunen prezioen funtzioa dela zehazten da, Gretl irteerak denborazko datuekin ematen duen informazioa azaltzeko asmoarekin.
Analisi hau zehaztasunez egiten da **5.2 Adibidean.**

Estimazio-emaitzak.

Zehaztatutako erregresio lineal orokorreko eredua:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X2_t + \beta_3 X3_t + \beta_4 X4_t + u_t \quad t = 1, ...T$$

- Y: aldagai azaldua (oilasko konstumoa).
- $X2$: aldagai azaltzaile kuantitatiboa.
- $X3$: aldagai azaltzaile kuantitatiboa.
- $X4$: aldagai azaltzaile kuantitatiboa.
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$: koefiziente ezezagunak.
- u: perturbazio aleatorioa.
- T: lagineko urte kopurua.
- t: behaketa adierazteko erabiltzen den azpi-indizea.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1990 –2012 behaketak erabiliz ($T = 23$)
Aldagai azaldua: Y

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-arrazoia	p-balioa
const	38,7207	3,61477	10,7118	0,0000
X4	4,37920	1,55013	2,8250	0,0108
X2	0,0109351	0,00236651	4,6208	0,0002
X3	−13,6515	3,91865	−3,4837	0,0025

Ald. azalduaren bbkoa	39,66957	Ald. azalduaren Desb. Tip.	7,372950
Hondar Karratuen Batura	74,77556	Erregresioaren KAB	1,983824
R^2	0,937475	Zuzendutako R^2	0,927603
$F(3, 19)$	94,95932	P-balioa(F)	1,28e–11
Log-egiantza	−46,19405	Akaike Irizpidea	100,3881
Schwarz Irizpidea	104,9301	Hannan–Quinn	101,5304
$\hat{\rho}$	0,563845	Durbin–Watson	0,882646

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1990 –2012 behaketak erabiliz ($T = 23$)
Aldagai azaldua: Y

Erabiltzen diren datuak denborazkoak direnean, behaketen lagin-maiztasuna agertzen da:

1990–2012 (T = 23) $\rightarrow$ 23 urteroko behaketak.

Maiztasuna hiruhilabetekoa izango balitz: 1950:1-1955:3 (T $=$ 23).

Maiztasuna hilerokoa izango balitz: 1980:01-1981:11 (T $=$ 23).

Maiztasuna egunekoa izango balitz: 1950-01-01:1950-06-04 (T $=$ 23).

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Eredua 1: KTA, 1990 –2012 behaketak erabiliz ($T = 23$)
Aldagai azaldua: Y

	Koefizientea	Desb. Tipikoa	t-arrazoia	p-balioa
const	38,7207	3,61477	10,7118	0,0000
X4	4,37920	1,55013	2,8250	0,0108
X2	0,0109351	0,00236651	4,6208	0,0002
X3	−13,6515	3,91865	−3,4837	0,0025

Irteerako informazio gehiena berdina da denborazko edota zeharkako datuentzat.

Oharra eredu bat Gretl-ekin estimatzean, erregresoreak sartzen diren ordenean agertzen dira. Hau da, $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t$, eredua estimatzeko erregresoreak orden berdinean sartzen dira, edo bestela, oharterazi bigarren lerroko emaitzak ez direla $X2$-renak baizik eta $X4$-renak.

Estimazio-emaitzak.

Gretl irteera.

Ald. azalduaren bbkoa	39,66957	Ald. azalduaren Desb. Tip.	7,372950
Hondar Karratuen Batura	74,77556	Erregresioaren KAB	1,983824
R^2	0,937475	Zuzendutako R^2	0,927603
$F(3, 19)$	94,95932	P-balioa(F)	1,28e–11
Log-egiantza	−46,19405	Akaike Irizpidea	100,3881
Schwarz Irizpidea	104,9301	Hannan–Quinn	101,5304
$\hat{\rho}$	**0,563845**	**Durbin–Watson**	**0,882646**

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{t-1}^2} \qquad \text{Durbin-Watson: } \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

Bi emaitza horiek bakarrik denborazko datuekin eredu bat estimatzean agertzen dira. Izatez, autokorrelazio kontrasteak (7. gaia) egiteko informazio baliagarria da.

Edukia.

Estimazio-emaitzen aurkezpena.

Normalean, erregresioko estimazio-emaitzak laburtuta aurkezten dira: LEF, desbideratze-tipikoak, mugatze-koefizientea eta hondar karratuen batura.

Emaitzen laburpena.

$$\widehat{\text{pizza}}_i = \underset{(72{,}343)}{342,885} + \underset{(0{,}46430)}{1,83248}\,\mathsf{errenta}_i - \underset{(2{,}3170)}{7,57556}\,\mathsf{adina}_i \quad i = 1, ..., 40$$

$$R^2 = 0,329 \qquad HKB = 635636,7$$

(Desbideratze-tipikoak parentesi artean)

Estimazio-emaitzen aurkezpena.

Estimatzeko erabili diren datuak denborazkoak direnean, aurreko informazioari Durbin-Watson estatistikoa gehitzen zaio.

Emaitzen laburpena.

$$\widehat{\mathrm{Y}}_t = \underset{(3,6496)}{38,6472} + \underset{(1,5633)}{4,35136}\,\mathsf{X4}_t + \underset{(0,0023812)}{0,0108762}\,\mathsf{X2}_t - \underset{(3,9492)}{13,5271}\,\mathsf{X3}_t$$

$$t = 1990, ..., 2012 \quad R^2 = 0.9366 \quad HKB = 75,758 \quad DW = 0,8828$$

(Desbideratze-tipikoak parentesi artean)

Edukia.

Edukia.