3. autoebaluazio probaren ebazpena

1. Izan bitez Tayloren garapen hauek:

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + O(h^7)$$

eta

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6).$$

Aurkitu horien baturaren eta biderkaduraren hurbiltze-ordenak.

Ebazpena

$\sin(h) + \cos(h) = (h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + O(h^7)) + (1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6)) = 1 + h - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + (O(h^6) + O(h^7)) = 1 + h - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + O(h^6).$

Beraz, hurbiltze-ordena $O(h^6)$ da.

$\sin(h)\cos(h) = (h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + O(h^7))(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6)) = (h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!})(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!}) + (h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!})O(h^6) + (1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!})O(h^7) + O(h^7)O(h^6) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^3}{2!} + \frac{h^5}{3!2!} - \frac{h^7}{5!2!} + \frac{h^5}{4!} - \frac{h^7}{3!4!} + \frac{h^9}{5!4!} + O(h^7) + O(h^7) + O(h^{13}) = h - \frac{4h^3}{6} + \frac{2h^5}{15} + O(h^7).$

Beraz, hurbiltze-ordena $O(h^7)$ da.

2. Izan bitez $f(x)$ eta bere goi-ordenako deribatuak jarraituak eta bornatuak p erroa daukan (a, b) tarte batean.

   (a) Azaldu eta frogatu Newton-Raphsonen konbergentzia koadratikoaren teorema.

   (b) Izan bedi $e^x - 2x^2 - 1 = 0$ ekuazioa.

   - Metodo grafikoa erabiliz egiaztatu bi erro ez-nulu daudela $[0.5, 1]$ eta $[2.5, 3]$ tarteetan hurrenez hurren.
   - Aurkitu erro horiek Newton-Raphsonen metodoa erabiliz, 0.0001 zehaztasun erlatiboarekin eta 3 iterazio, gehienez, eginez. Egin eragiketak 6 digitu esangarrirekin.

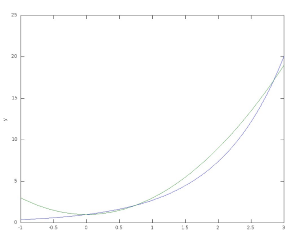
Ebazpena

(a) Azaldu eta frogatu 4.3.3. teorema, ikus teoriako 81—82 orrialdeak.

(b) Izan bedi $f(x) = e^x - 2x^2 - 1$. Hortaz, $f'(x) = e^x - 4x$.

- Kontsidera dezagun $e^x - 2x^2 - 1 = 0$ ekuazioa. Ekuazio horren erroak bi kurba hauen ebakitze-puntuen abszisak dira:

$$g(x) = e^x$$
$$h(x) = 2x^2 + 1$$



Bi erro ikusten dira $p = 0$ (bistan dago), eta $p \in (0.5, 1)$ eta $p \in (2.5, 3)$ tarteetan.
Newton-Raphson-en metodoaz,
$p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} = p_{n-1} - \dfrac{e^{p_{n-1}} - 2p_{n-1}^2 - 1}{e^{p_{n-1}} - 4p_{n-1}}$.

- $p \in (0.5, 1)$ tarteko erroa aurkitzeko $p_0 = 0.5$ hartuko dugu,

n	p	errorea	zehaztasuna
0	0.5	0.148721	
1	0.923371	0.187465	0.458506
2	0.763925	0.0204769	0.208720
3	0.741398	0.00047429	0.0303839

Beraz, $p = 0.741398$ balioak jarritako irizpideak betetzen ditu ($n = 3$ da).

$p \in (2.5, 3)$ tarteko erroa aurkitzeko $p_0 = 3$ hartuko dugu,

n	p	errorea	zehaztasuna
0	3	1.08554	
1	2.86574	0.137134	0.0468488
2	2.84326	0.00339497	0.00790786
3	2.84267	0.00000226	0.00020596

Beraz, $p = 2.84267$ balioak jarritako irizpideak betetzen ditu ($n = 3$ da).

3. Izan bedi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema gaindeterminatua, non

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(a) Ebatzi sistema hori ekuazio normalak erabiliz eta haiek osatutako sistema LU metodoaz ebatziz. Zein da beren hondarraren norma euklidearra?

(b) Ebatzi sistema QR faktorizazioaren bitartez. Kalkula ezazu hondarraren norma euklidearra.

Ebazpena

(a) $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$ ebatziko dugu, non $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$ eta $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$. Emaitza $\boldsymbol{x}^* = [2 \quad 1]^t$ da.
Bestalde, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b} = [5 \quad 1 \quad -4]^t$. Ondorioz, $\|\boldsymbol{r}\|_2 = \sqrt{41} = 6.4807$ hondarraren norma euklidearra da.

(b) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\sigma_1 = +\|\boldsymbol{a}_1\|_2 = +\sqrt{3} = 1.7321$, ondorioz, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \sigma_1\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 2.7321 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
$\rho_1 = \frac{1}{\sigma_1[\boldsymbol{u}_1]_1} = \frac{1}{1.7321 \cdot 2.7321} = 0.2113$.
Banan-banan kalkulatuko ditugu $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}$ matrizearen $\widetilde{\boldsymbol{a}}_i$ zutabeak eta $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{b}$.
$\widetilde{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{bmatrix} -1.7321 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (eraikuntzagatik) eta

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \rho_1(\boldsymbol{u}_1^t \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.366 \\ 1.631 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} - \rho_1(\boldsymbol{u}_1^t \boldsymbol{b})\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -3.4641 \\ 0.5358 \\ 7.464 \end{bmatrix}$$

Orain, $\sigma_2 = \|(3.366, 1.631)\|_2 = 3.740, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.106 \\ 1.631 \end{bmatrix}$ eta $\rho_2 = 0.03763$. Ondorioz,

$$\widehat{\boldsymbol{a}}_2 = \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 - \rho_2(\boldsymbol{u}_2^t \widetilde{\boldsymbol{a}}_2)\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.7417 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\boldsymbol{b}} = \widetilde{\boldsymbol{b}} - \rho_2(\boldsymbol{u}_2^t \widetilde{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -3.4641 \\ -3.7417 \\ 6.4807 \end{bmatrix}$$

Orduan, $\boldsymbol{Rx} = \widehat{\boldsymbol{b}}$ sistema hau dugu:

$$\begin{bmatrix} -1.7321 & 0 \\ 0 & -3.7417 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.4641 \\ -3.7417 \\ 6.4807 \end{bmatrix}$$

Sistema horren lehenengo bi ekuazioen sistema ebatziz, hau da, $\boldsymbol{R}_u \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ sistema, $\boldsymbol{x} = [2 \quad 1]^t$ dugu eta hondarra $d = 6.4807$ da (ekuazio normalak ebatziz lortu dugun berdina).

4. Azaldu dakizuna Quasi-Newtonen metodoei buruz eta, hain zuzen, Broydenen metodoaz.

Ebazpena

Ikus teoriako 6.3. atala.