2. autoebaluazio probaren ebazpena

1. Idatzi -66.25 zenbakia era hauetan:

   (a) (a) Era bitarrean.

   (b) (b) Koma mugikorreko era normalizatuan.

   (c) (c) 32 biteko zehaztasun bakuneko kate baten bidez (IEEE-754 estandarrean).

Ebazpena

(a) -66.25=-(66+0.25). Era bitarrean adierazteko hau egingo dugu:

$66 = 2 \cdot 33 + 0$
$33 = 2 \cdot 16 + 1$
$16 = 2 \cdot 8 + 0$
$8 = 2 \cdot 4 + 0$ hondarrak behetik gora hartuz, zera lortzen dugu: $66 = 1000010_{(2}$
$4 = 2 \cdot 2 + 0$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
$1 = 2 \cdot 0 + 1,$

dela.

Bestalde,

$R = 0.25$
$2R = 0.5 \ \rightarrow \ d_1 = 0, \ Z_1 = 0.5$
$2Z_1 = 1.0 \ \rightarrow \ d_2 = 1, \ Z_2 = 0,$

eta orduan $0.25 = 0.01_{(2}$.

Beraz, $-66.25 = -1000010.01_{(2}$

(b) Era normalizatuan: $-66.25 = -1000010.01_{(2} = -1.00001001 \cdot 2^6$.

(c) Berretzaileari 127 alborapena batu behar diogu eta gero adierazi era bitarrean:

$6 + 127 = 133 = 2^7 + 2^2 + 2^0 = 10000101_{(2}$

32 biteko zehaztasun bakuneko kate baten bidez $1|10000101|00001001000000000000000$ dugu. Lehenengo zatiak zeinua adierazten du, bigarrenak berretzailea eta hirugarrenak mantisa.

2. Izan bedi urtegi kubiko bat, bere oinarri laukizuzenak $y = 110$ metroko luzera finkoa du eta x zabalera aldakorra. Baldin h ur-maila (metrotan) adierazpen honen arabera t denboraren (egunetan) eta x zabaleraren menpean badago:

$$h = \frac{t^2 \ln(x^2+2)}{x+4},$$

zenbat neurtu behar du x zabalerak 4.5 egunetan urtegiak 10000 m^3 ur gordetzeko? Galdera hori erantzuteko aurkitu x aldagairako $[a, a+1]$ tarte egoki bat eta gero egin bi iterazio zuk aukeratutako metodo egokiena erabiliz.

Ebazpena

Bolumenerako hau dugu:

$$B = x \cdot y \cdot h = x \cdot 110 \cdot \frac{4.4^2 \ln(x^2+2)}{x+4} = 10000$$

Hortaz, $f(x) = 2227.50 \cdot x \ln(x^2+2) - 10000(x+4) = 0$ eta

$f'(x) = 2227.50 \ln(x^2+2) + \dfrac{2227.50 \cdot 2x^2}{(x^2+2)} - 10000$ eta tanteatuz $[a, a+1] = [16, 17]$ dela aurkitzen da, zeren $f(16) < 0$ eta $f(17) > 0$.

Orain, Newton-en metodoa erabiliz $p_0 = 16$ hartuz, bi iterazioetan hau lortzen da:

iterazioa	p	errorea	zehaztasuna
0	16	2092.5	
1	16.308	13.238	0.0189
2	16.306	0.00051013	0.00011808

Zabalerak 16.306 m neurtu behar du.

3. a) Izan bedi $\boldsymbol{A}$ matrize ez-singular bat; hots, $\boldsymbol{A}^{-1}$ existitzen da eta bakarra da. Demagun sistema lineal hau:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

bere soluzio zehatza (eta bakarra) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ da. Demagun berdintzaren eskuin aldeko gaia $\boldsymbol{b}$ izatetik $\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$ izatera aldatzen dela (hots, $\boldsymbol{b}$ perturbatzen dugula), $\boldsymbol{A}$ berdina izanik. Izan bedi $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_b$ aldatutako problemaren soluzio zehatza dela, alegia:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_b) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}.$$

Baldin baldintzazko zenbakia $\kappa(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$ bada, aurrekoan oinarrituz frogatu hau egiaztatzen dela:

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}_b\|/\|\boldsymbol{x}\|}{\|\delta\boldsymbol{b}\|/\|\boldsymbol{b}\|} \leq \kappa(\boldsymbol{A}) \qquad (*)$$

b) Izan bedi $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sistema non

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.550 & 0.423 \\ 0.484 & 0.372 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.127 \\ 0.112 \end{bmatrix}.$$

Baldin $\delta\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.00007 \\ 0.00028 \end{bmatrix}$ bada, egiaztatu $(*)$ desberdintza betetzen dela. Erabili norma infinitua.

Ebazpena

a) Azalduta dago teoriako 5.8. ataleko 112 orrialdean, ikus (5.19) adierazpena.

b) $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2818.2 & 3204.5 \\ 3666.7 & -4166.7 \end{bmatrix}$

$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 0.973$ eta $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 7833.4$, hortaz, baldintzazko zenbakia $\kappa_\infty(\boldsymbol{A}) = 0.973 \cdot 7833.4 = 7621.898$ da.

Bestalde, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sistemaren soluzioa $\boldsymbol{x} = [1 \quad -1]^t$ da. Gainera, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_b) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$ sistema ebatziz, $(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}_b) = [1.7 \quad -1.91]^t \Rightarrow \delta\boldsymbol{x}_b = [0.7 \quad -0.91]^t$. Ondorioz,

$\dfrac{\|\delta\boldsymbol{x}_b\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = 0.91$ eta $\dfrac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} = \dfrac{0.00028}{0.127} = 2.2 \cdot 10^{-3}$, eta hori dela eta,

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}_b\|/\|\boldsymbol{x}\|}{\|\delta\boldsymbol{b}\|/\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{0.91}{2.2 \cdot 10^{-3}} = 413.\overline{63} \leq \kappa_\infty(\boldsymbol{A}) = 7621.898$$

Beraz, betetzen da a) ataleko (*) desberdintza.

4. Izan bitez $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^n$ Householder-en bektore bat eta $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ elkartutako Householder-en matrizea.

   (a) Ikuspuntu geometriko batetik zer gertatzen da $\boldsymbol{x}$ bektore bati $\boldsymbol{H}$ matrizeaz aurrebiderkatzen diogunean? Nolakoa da $\boldsymbol{Hx}$ bektorea $\boldsymbol{x}$ bektorearekiko?

   (b) Frogatu $\boldsymbol{H}$ simetrikoa eta ortogonala dela.

   (c) Baldin $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\dots\boldsymbol{H}_n$ bada ($\boldsymbol{H}_i$ Householder-en matrizeak $i = 1, 2, \dots, n$), frogatu $\boldsymbol{Q}$ ortogonala dela.

Ebazpena

a) $\boldsymbol{Hx}$ eta $\boldsymbol{x}$ simetrikoak dira $\boldsymbol{u}^{\perp}$-rekiko.

b) $\boldsymbol{H}$ simetrikoa dela ikusiko dugu. $\boldsymbol{H} = \mathbb{1} - \rho\boldsymbol{uu}^t$ denez, $\boldsymbol{H}^t = (\mathbb{1} - \rho\boldsymbol{uu}^t)^t = \mathbb{1}^t - \rho(\boldsymbol{uu}^t)^t = \mathbb{1} - \rho(\boldsymbol{u}^t)^t\boldsymbol{u}^t = \mathbb{1} - \rho\boldsymbol{uu}^t = \boldsymbol{H}$.

Ortogonal dela frogatuko dugu. $\rho = \dfrac{2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}$ dela kontuan hartuko dugu.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{HH}^t = \quad & \boldsymbol{HH} = (\mathbb{1} - \rho\boldsymbol{uu}^t)(\mathbb{1} - \rho\boldsymbol{uu}^t) = \mathbb{1} - 2\rho\boldsymbol{uu}^t + (\rho\boldsymbol{uu}^t)(\rho\boldsymbol{uu}^t) = \\ & \mathbb{1} - \frac{4\boldsymbol{uu}^t}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2} + \frac{4}{\|\boldsymbol{u}\|_2^4}\boldsymbol{uu}^t\boldsymbol{uu}^t = \mathbb{1} - \frac{4\boldsymbol{uu}^t}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2} + \frac{4}{\|\boldsymbol{u}\|_2^4}\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{u}\|_2^2\boldsymbol{u}^t = \mathbb{1}.\end{aligned}$$

c) $\boldsymbol{Q}^{-1} = (\boldsymbol{H}_1 \cdot \dots \cdot \boldsymbol{H}_n)^{-1} = \boldsymbol{H}_1^{-1} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{H}_1^{-1} = \boldsymbol{H}_1^t \cdot \dots \cdot \boldsymbol{H}_1^t = \boldsymbol{Q}^t$.

Beraz, $\boldsymbol{Q}$ ortogonala da.

5. Izan bitez datu hauek: (0,1), (0.25,1.284), (0.5,1.6487), (0.75,2.117). Doitu datu horiek bigarren mailako polinomio baten bidez eta bere koefizienteak aurkitzeko erabili minimo karratuen metodoa QR faktorizazioarekin. Bost digitu esangarri erabili eragiketa guztietarako. Zein da hondarra?

Ebazpena

t	0	0.25	0.5	0.75
b	1	1.284	1.6487	2.117

$f(t) = xt^2 + yt + z = b$

Taula horren arabera f-k ekuazio hauek bete behar ditu:

$$\begin{aligned}&x \cdot 0^2 + y \cdot 0 + z = 1\\ &x \cdot 0.25^2 + y \cdot 0.25 + z = 1.284\\ &x \cdot 0.5^2 + y \cdot 0.5 + z = 1.6487\\ &x \cdot 0.75^2 + y \cdot 0.75 + z = 2.117\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.0625 & 0.25 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \\ 0.5625 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.284 \\ 1.6487 \\ 2.117 \end{bmatrix}$$

Zutabe bakoitzeko $\boldsymbol{H} = \mathbb{1} - \rho\boldsymbol{uu}^t$ kalkulatuko dugu.

(1) $\boldsymbol{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.61872 \\ 0.25 \\ 0.5625 \end{bmatrix}$, $\sigma_1 = \|\boldsymbol{a}_1\|_2 = +0.61872$, $\rho_1 = 2.6122$. Orduan,

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.61872 & -0.90914 & -1.4142 \\ 0 & 0.15816 & 0.75613 \\ 0 & 0.13265 & 0.02451 \\ 0 & -0.07653 & -1.19485 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2.7205 \\ 0.9082 \\ 0.14538 \\ -1.2655 \end{bmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.37832 \\ 0.13265 \\ -0.076531 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \|(0.15816, 0.13265, -0.07853)\|_2 = +0.22016$, $\rho_2 = 12.006$.

Orduan,

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.61872 & -0.90914 & -1.4142 & \\ 0 & -0.22016 & -0.97333 & \\ 0 & 0 & -0.58190 & 0 \\ 0 & 0 & -0.84500 & \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2.7205 \\ -1.1799 \\ -0.58678 \\ -0.84306 \end{bmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{u}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.6079 \\ -0.845 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \|(-0.58190, -0.84500)\|_2 = -1.0260$, $\rho_3 = 0.60619$. Orduan,

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}^{(4)} = \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.61872 & -0.90914 & -1.4142 \\ 0 & -0.22016 & -0.97333 \\ 0 & 0 & 1.0260 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2.7205 \\ -1.1799 \\ 1.0272 \\ 0.0051206 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{R}_u = \begin{bmatrix} -0.61872 & -0.90914 & -1.4142 \\ 0 & -0.22016 & -0.97333 \\ 0 & 0 & 1.0260 \end{bmatrix} \text{ eta } \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -2.7205 \\ -1.1799 \\ 1.0272 \end{bmatrix}.$$

Orain, $\boldsymbol{R}_u \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}$ sistema ebatziz, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.73720 \\ 0.93338 \\ 1.00114 \end{bmatrix}$ lortzen da eta hondarra=0.0051206 da.

6. Aurkitu ondoko sistema ez-linealerako soluzioaren hurbilpen bat Newtonen metodoaren lehenengo iterazioa eginez, lau digitu esangarriko aritmetika erabiliz, $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-0.5, -0.3, 5.1)^t$ hasierako hurbilpena izanik eta sortzen den sistema lineala ebazteko LU metodoa erabiliz pibotatze partzialarekin.

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 &= 4 - x_2 \end{aligned}$$

Ebazpena

Izan bedi $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^t$ eta kontsidera ditzagun funtzio hauek:

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{x}) &= x_1x_2x_3 - 1 \\ f_2(\boldsymbol{x}) &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 \\ f_3(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 + x_2 + x_3 - 4 \end{aligned}$$

Izan bedi $\boldsymbol{f}(x) = [f_1(\boldsymbol{x}) \quad f_2(\boldsymbol{x}) \quad f_3(\boldsymbol{x})]^t$, bere deribatua $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Orduan $\boldsymbol{x}_0 = [-0.5 \quad -0.3 \quad 5.1]^t$ puntuan hau dugu:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} -1.53 & -2.55 & 0.15 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} -0.235 \\ 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Jarraian, Newton-en $\boldsymbol{Ap} = \boldsymbol{b}$ sistema ebatzi behar dugu. Horretarako LU metodoa pibotatze partzialarekin erabiliko dugu.

$\boldsymbol{A}$-ren lehenengo zutabeko gai handiena 2 denez, 3. eta 1. lerroak permutatuko ditugu, hots, $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Orduan $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1.53 & -2.55 & 0.15 \end{bmatrix}$.

Beraz, $\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.765 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Orduan,

$\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & -1.785 & 0.915 \end{bmatrix}$

Orain biderkadura horren bigarren zutabeko azken bi gaien artean -1.785 da tamaina handienekoa, hortaz, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2. eta 3. lerroak trukatzeko.

Orduan $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1.785 & 0.915 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

Beraz, $\boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8403 & 1 \end{bmatrix}$. Orduan, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1.785 & 0.915 \\ 0 & 0 & 1.269 \end{bmatrix}$

$\widetilde{\boldsymbol{M}}_1 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.765 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Eta $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{M}_2\widetilde{\boldsymbol{M}}_1(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A})$, kalkulu hauek eginez:

$$\boldsymbol{L}_1 = \widetilde{\boldsymbol{M}}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.765 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{M}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.8403 & 1 \end{bmatrix}$$

Aurreko berdintzak honela idatz ditzakegu:

$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{U} \;\rightarrow\; \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$, non

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ eta

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.765 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.8403 & 1 \end{bmatrix}$

Orain, $\boldsymbol{Ap} = \boldsymbol{b}$ sistema ebazteko, $\boldsymbol{PAp} = \boldsymbol{LUp} = \boldsymbol{Pb}$ dugunez, sistema honela ebatziko dugu:

1. $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$ sistema ebazten dugu (goitik behera), $\boldsymbol{y} = [0.2 \quad 0.388 \quad 0.22605]^t$,
2. $\boldsymbol{Up} = \boldsymbol{y}$ sistema ebazten dugu (behetik gora), $\boldsymbol{p} = [0.07395 \quad -0.1260 \quad 0.1781]^t$.

Azkenik $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p} = [-0.4260 \quad -0.4260 \quad 5.278]^t$.