1. autoebaluazio probaren ebazpena

1. Izan bitez zuzen bateko (x_0, y_0) eta (x_1, y_1) puntuak, aurkitu lerro horren ebakitze puntua x ardatzarekin. Bi formula hauek erabil ditzakegu:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{eta} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}$$

   a) Froga ezazu bi adierazpenak aljebraikoki ondo daudela.

   b) $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ eta $(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$ datuak eta hiru digituko aritmetika erabiliz, kalkula ezazu ebakidura bi metodoen bidez. Zein metodo da hoberena? Zergatik?

Ebazpena

a) (x_0, y_0) eta (x_1, y_1) puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa hau da:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Zuzen hori abszisa ardatzarekin, $y = 0$-rekin, $x = x_0 - \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_0$-rako ebakitzen da, kenketa hori eginez gero, hau lortzen da:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}.$$

b) Adierazpen batekin hau lortzen da:

$$\overline{x} = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} = \frac{1.31 \cdot 4.76 - 1.93 \cdot 3.24}{4.76 - 3.24} = \frac{6.24 - 6.25}{1.52} = -0.00658$$

Eta bestearekin beste hau:

$$\widehat{x} = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_0 = 1.31 - \frac{1.93 - 1.31}{4.76 - 3.24} 3.24 = 1.31 - \frac{0.62}{1.52} 3.24 =$$

$$1.31 - 0.408 \cdot 3.24 = 1.31 - 1.32 = -0.01$$

Balio zehatza $x = -0.011578947$ da. Ondorioz,
$|x - \overline{x}| = |-0.011578947 - (-0.00658)| = 0.004998947$ eta
$|x - \widehat{x}| = |-0.011578947 - (-0.01)| = 0.001578947$.
Errore absolutua txikiagoa de $\widehat{x}$ kasuan $\overline{x}$ kasuan baino, lehenengo adierazpeneko ($\overline{x}$-reneko) zenbakitzailean ditugun biderkaduren biribiltzeagatik. Beraz, hoberena $\widehat{x}$-ri dagokiona da.

2. (A) Frogatu puntu finkoaren teoremako (i) atala. Hots, “Demagun (a) $F, F' \in C[a, b]$, (b) $K > 0$, (c) $p_0 \in (a, b)$ eta (d) $F(x) \in [a, b]$, $x \in [a, b]$ guztietarako. Orduan, badago F-ren $p \in [a, b]$ puntu finko bat.

   (i) Baldin $|F'(x)| \le K < 1$, $x \in [a, b]$ guztietarako, orduan p da F-ren puntu finko bakarra $[a, b]$ tartean eta $p_n = F(p_{n-1})$ iterazioa p puntura konbergitzen da. Kasu horretan, p puntu finko erakargarria dela esaten da.”

(B) Izan bedi $x+\ln x = 0$ ekuazioa, $x_0 = 0.55$-tik hurbil erro bat daukala. Puntu finkoaren metodoa erabiltzeko, besteak beste, iterazio funtzio hauek erabil ditzakegu:

a) $x_n = -\ln(x_{n-1})$,

b) $x_n = \exp(-x_{n-1})$,

c) $x_n = \dfrac{x_{n-1} + \exp(-x_{n-1})}{2}$.

Emandako x_0 hastapen-puntu horretarako, iterazio funtzio horietako zeintzuk konbergitzen dira? Horietako zein konbergitzen da azkarrago? (A) atala kontuan hartuz arrazoitu bi erantzunak iterazioak egin gabe. Kalkulatu iterazio funtzio horien lehenengo hiru iterazioak aurreko ondorioekin konparatzeko.

Ebazpena

(A) Ikus teoriako 4.3. teorema.

(B) $x + \ln x = 0$ adierazpenetik $x = -\ln x$ lortzen dugu, hots $F_1(x) = -\ln x$.
Gainera, $\ln x = -x$ eta hortik $x = e^{-x}$, hots $F_2(x) = e^{-x}$.
Eta, $x = e^{-x}$ erabiliz $2x = x + e^{-x}$ dugu, $x = \dfrac{x+e^{-x}}{2}$ lortuz, hots $F_3 = \dfrac{x+e^{-x}}{2}$.

Kasu guztietan $x > 0$ dela suposatuko dugu.

- $|F_1'(x)| = |-\frac{1}{x}| < 1$ izan behar konbergente izateko, hots, $1/x < 1$, ondorioz, konbergente izateko $x > 1$ bete behar du; beraz, $x_0 = 0.55$-tik hurbil dagoen $\overline{x}$ puntu batera ezin da konbergitu puntu finkoaren metodoa (4.3. teorema (ii)), $|F_1'(\overline{x})| > 1$ izango baita.
- $|F_2'(x)| = |-e^{-x}| < 1$ izan behar konbergente izateko. Hots, $x > 0$ bada, konbergente izango da; beraz, $x_0 = 0.55$-tik hurbil dagoen puntu batera konbergituko da puntu finkoaren metodoaz (4.3. teorema).
- $|F_3'(x)| = |(1-e^{-x})/2| < 1$ izan behar konbergente izateko. Hots, $e^{-x} > -1$ bada, konbergente izango da; beraz, $x_0 = 0.55$-tik hurbil dagoen puntu batera konbergituko da puntu finkoaren metodoaz (4.3. teorema).

Azkenik, $|F_2'(0.55)| = 0.5769$ eta $|F_3'(0.55)| = 0.2115$, deribatu horien jarraitutasuna eta (4.6) adierazpena kontuan hartuz, azkartasun handiena $F_3(x)$ funtziorako lortuko da.

Iterazio-funtzio horiei dagozkien puntu finko metodoaren lehenengo hiru iterazioak:

a)
$$\begin{aligned} x_1 &= -\ln x_0 = 0.5978 \\ x_2 &= -\ln x_1 = 0.5145 \\ x_3 &= -\ln x_3 = 0.6646. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-x_0} = 0.5769 \\ x_2 &= e^{-x_1} = 0.5616 \\ x_3 &= e^{-x_2} = 0.5703. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0 + e^{-x_0}}{2} = 0.5634 \\ x_2 &= \frac{x_1 + e^{-x_1}}{2} = 0.5663 \\ x_3 &= \frac{x_2 + e^{-x_2}}{2} = 0.5670. \end{aligned}$$

3. Izan bedi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sistema non

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lau digitu esangarri erabiliz egin ondokoa.

a) Ebatzi sistema lineal hori LU deskonposizioaz pibotaze partzialarekin.

b) Ebatzi sistema lineal hori QR faktorizazioaren bidez.

c) Zein da $\boldsymbol{A}$ matrizearen bat-norma? Zein da $\kappa_1(\boldsymbol{A})$ (bat-normari dagokion $\boldsymbol{A}$-ren baldintzazko zenbakia)?

Ebazpena

a) $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_1 b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ egiaztatuz.

Orain, $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{b}$ sistema ebatziko dugu honela:

$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{b}$ ebatziz, $\boldsymbol{y} = [1 \quad -1/2]^t$,

$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ebatziz, $\boldsymbol{x} = [1 \quad -1]^t$.

b) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_1 = +\|\boldsymbol{a}_1\|_2 = \sqrt{5} \rightarrow \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\rho_1 = \frac{1}{\sigma_1[\boldsymbol{u}_1]_1} = \frac{1}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})} = 0.1382$$

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \rho_1(\boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -2.236 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \rho_1(\boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -1.342 \\ -0.4472 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \rho_1(\boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{b})\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -0.8944 \\ 0.4472 \end{bmatrix}$$

Beraz, $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -2.236 & -1.342 \\ 0 & -0.4472 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -0.8944 \\ 0.4472 \end{bmatrix}$ eta orain $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{b}$ sistema ebatziz, $\boldsymbol{x} = [1 \quad -1]^t$ lortzen dugu.

c) $\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\{1+2, 1+1\} = 3$; $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = \max\{3, 2\} = 3 \Rightarrow \kappa_1(\boldsymbol{A}) = 3 \cdot 3 = 9$.

4. Izan bedi ekuazio ez-linealen sistema hau:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 - 10x + y^2 + 8 &= 0, \\ f_2(x,y) &= xy^2 + x - 10y + 8 &= 0 \end{aligned}$$

a) Deskribatu sistema ez-linealetarako Newton-en metodoa.

b) Lau digitu esangarri erabiliz ebatzi sistema hori Newton-en metodoaz, $(x_0, y_0) = (1.2, 1.2)$ hartuz, eta bukatu $\|\boldsymbol{f}(x,y)\|_\infty < 10^{-3}$ denean, non $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$. Zenbat iterazio erabili ditugu? Zein da zehaztasun erlatiboa? Zein da gutxi gorabehera konbergentzia ordena?

Ebazpena

a) Galdera hau erantzuten da 6.1. ataleko 151—152 orrialdetan agertzen dena azalduz.

b) ($\underline{k=1}$) $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} -1.12 \\ -1.072 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x-10 & 2y \\ y^2+1 & 2xy-10 \end{bmatrix} \to$

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} -7.6 & 2.4 \\ 2.44 & -7.12 \end{bmatrix}$ eta orain $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{p}_0 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ Newton-en sistema ebatziz, $\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} -0.2186 \\ -0.2255 \end{bmatrix}$ eta, ondorioz,

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.9814 \\ 0.9745 \end{bmatrix} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0.0986 \\ 0.1682 \end{bmatrix} \to \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\|_\infty = 0.1682 \not< 10^{-3}$.

($\underline{k=2}$) $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} -8.037 & 1.949 \\ 1.950 & -8.087 \end{bmatrix}$ eta orain $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$ Newton-en sistema ebatziz, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0.0184 \\ 0.0252 \end{bmatrix}$ eta, ondorioz,

$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0.9998 \\ 0.9998 \end{bmatrix} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0015 \end{bmatrix} \to \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|_\infty = 0.0015 \not< 10^{-3}$.

($\underline{k=3}$) $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} -8.000 & 1.999 \\ 1.999 & -8.001 \end{bmatrix}$ eta orain $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$ Newton-en sistema ebatziz, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0.0001812 \\ 0.0002378 \end{bmatrix}$ eta, ondorioz,

$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$ (biribilduz) $\to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3)\|_\infty = 0 < 10^{-3}$ dugu eta eskatutako amaitzeko irizpidea betetzen da.

Hiru iterazio erabili dira.

Zehaztasun erlatiboa aurkitzeko hau egiten dugu:

$\dfrac{\|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \dfrac{\|\boldsymbol{p}_2\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}_3\|_\infty} = \dfrac{0.0002378}{1} \approx 2 \cdot 10^{-4}$.

Konbergentzia ordena aztertzeko zera dugu:

$\dfrac{\|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|_\infty^2} = \dfrac{\|\boldsymbol{p}_2\|_\infty}{\|\boldsymbol{p}_1\|_\infty^2} = \dfrac{0.0002378}{(0.0252)^2} = \dfrac{0.0002378}{0.000625} < 1$ eta konbergentzia koadratikoa duela ondorioztatzen da.