

Problema batzuen emaitzak

1. Sarrera

Ez du problemarik.

2. MATLABi buruzko oinarrizko nozioak

1.

```
(a) a=14.75;  
    b=-5.92;  
    c=61.4;  
    d=0.6*(a*b-c);  
    a+((a*b*(a+d)^2)/(c*sqrt(abs(a*b))))  
ans =  
    -829.5390
```

```
(b) d*exp(d/2)+(((a*d+c*d)/(25/a+35/b))/(a+b+c+d))  
  
ans =  
    -84.7934
```

3. A = (31:-4:-9)'

5.

```
x=-1.6:0.4:1.2  
y=((x.^3+1).^2)./(x.^2+2)  
plot(x,y,'-k')  
xlabel('X')  
ylabel('Y')
```

7.

```
(a) n=[0:100];  
    v= (-1).^n./(2*n+1);  
    % Batuketa:  
    batura=sum(v)  
    % Konparaketa:  
    (pi/4-batura)*4/pi  
  
(b) n=[0:1000];  
    v= (-1).^n./(2*n+1);  
    % Batuketa:  
    batura=sum(v)  
    % Konparaketa:  
    (pi/4-batura)*4/pi
```

```

(c) n=[0:5000];
    v= (-1).^n./(2*n+1);
    % Batuketa:
    batura=sum(v)
    % Konparaketa:
    (pi/4-batura)*4/pi

```

9. Lehenengo eta behin bb59 funtzioa definitzen dugu:

```

function [bb] = bb59(x)

% 59 baino handiagoak diren x bektoreko gaien batezbestekoa kalkulatzeko
% duen funtzioa.

Elementu_kopurua=length(x);
Bektorea=[];
Zenbatzailea=1;
for i=1:1:Elementu_kopurua
    if x(i)>59
        Bektorea(Zenbatzailea)=x(i);
        Zenbatzailea=Zenbatzailea+1;
    end
end
bb=mean(Bektorea)
end

Gero hau egiten da:

x=[15 85 72 59 100 80 44 60 91 38];
Batezbestekoa=bb59(x)

```

11.

```

function [r,theta] = polar(x,y)
% Sarrerako balioak: x eta y koordenatu kartesiarrak
% Irteerako balioak: r eta theta koordenatu polarrak
r=sqrt(x^2+y^2);
if x>0
    theta=atan(y./x)
elseif x<0 & y>0
    theta=atan(y./x)+pi
elseif x<0 & y<0
    theta=atan(y./x)-pi
elseif x<0 & y==0
    theta=pi
elseif x==0 & y>0
    theta=pi/2
elseif x==0 & y<0
    theta=-pi/2
else
    theta=0
end

```

Gero, e.b., hau egiten daiteke:

```
x=-1; y=-1;  
[r,theta] = polar(x,y)  
r =
```

1.4142

theta =

-2.3562

3. Ordenagailuaren aritmetika eta errorearen analisia

1. (a) 21; (c) 0.84375; (e) 1.4140625.
2. (a) 10111_{bi} ; (d) 0.0111_{bi} .
3. (a) $81 = 1010001_{bi}$; (b) $81 = 1.010001 \cdot 2^6$; (c) $81 = 0|01010101|0100010000000000000000$.
8. (a) $1/3 \approx 1.0101_{bi} \cdot 2^{-2}$, $1/5 \approx 1.1001_{bi} \cdot 2^{-3}$, $1/6 \approx 1.0101_{bi} \cdot 2^{-3}$,
 $1/3 + 1/5 \approx 1.0001_{bi} \cdot 2^{-1}$,
 $(1/3 + 1/5) + 1/6 \approx 1.0110_{bi} \cdot 2^{-1} = 11/16$.
Bestalde, $(1/3 + 1/5) + 1/6 = 7/10$.
Ondorioz, errore absolutua $= |7/10 - 11/16| = 2/160$.
13. (a) $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{3^k} = 0.498$; (b) $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{3^{7-k}} = 0.499$.
14. $\frac{1}{1-h} + \cos(h) = 2 + h + \frac{h^2}{2} + h^3 + O(h^4)$;
 $\frac{1}{1-h} \cos(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + O(h^4)$.
18. (a) $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; (c) $\cos(2x)$.
23. (a) $|(p+q+r) - (\hat{p} + \hat{q} + \hat{r})| = \varepsilon_p + \varepsilon_q + \varepsilon_r$;
(b) $R_q = \varepsilon_q/q$ errore erlatiboa da. Orduan, $\hat{q}/q \approx 1$ denean, $|1/q - 1/\hat{q}| \approx R_q/q$ eta
 $R_{1/q} = \frac{|1/q - 1/\hat{q}|}{|1/q|} \approx R_q$.

4. Ekuazio ez-linealen ebazpena

1. 13.

3. (a) Bisekzio metodoaz: $[0,2]$ tartean, $p_b = 1.1445$, $i_b = 9$;
 Regula falsi metodoaz: $[0,2]$ tartean, $p_{rf} = 1.1421$, $i_{rf} = 8$.
 Beraz, ia konbergentzia azkartasun berdina izan dute. Regula falsirena pizka bat azkarra-
 goa izan da kasu honetan, $i_{rf} < i_b$.
5. (a) $|b - a|/2^n < 10^{-4}$, beraz: $n = 14$;
 (b) $p_b = 1.1240$, $i_b = 10$; $|f(p_b)| = 0.0009$; $ze = 0.0009$ ($ze=zehaztasun$ erlatiboa);
 (c) $p_{rf} = 1.1232$, $i_{rf} = 9$; $|f(p_b)| = 0.009$; $ze = 0.0006$;
 (d) Azkarrena regula falsi metodoa izan da, $i_{rf} < i_b$.
7. (a) Puntu finko bat du $(0, 1)$ tartean $F([0, 1]) = [3/4, 1] \subset [0, 1]$ baita.
 Puntu finko bakarra da, zeren $|F'(x)| < 1 \quad \forall x \in [-2, 2]$ eta $[-0, 1] \subset [-2, 2]$ baitugu.
9. $x = -2$ eta $x = 2$ erroak dira eta $|F'(-2)| > 1$, $|F'(2)| > 1$ direnez, bi erro horiek ez dira puntu erakargarriak eta, ondorioz, ezin ditugu kalkulatu puntu finkoaren metodoa erabiliz.
11. $p_0 = -0.5$ bada, $p^* = -0.4590$, $i = 3$ iterazio erabiliz eta $ze = 2.7 \cdot 10^{-6}$ izanik.
 $p_0 = 4$ bada, $p^* = 3.7331$, $i = 4$ iterazio erabiliz eta $ze = 1.3 \cdot 10^{-6}$ izanik.
13. (a) $p_n = \frac{p_{n-1}^2 + 3}{2p_{n-1} - 1}$.
 (b) $p_1 = 2.5273$, $p_2 = 2.3152$, $p_3 = 2.3028$.
 (c) $|f(p_3)| = 0.0001534$.
 (d) $p_1 = -3$, $p_2 = -1.7143$, $p_3 = -1.3410$, $p_4 = -1.3032$. Azkar konbergitzen dela (konb. koadratikoa).
18. Ez, ekuazioak ez baitu erro errealik.
21. $p_3 = 1.5250$ eta $p_4 = 1.5214$. Errorea $|f(p_4)| = 1.206 \cdot 10^{-4}$ da, non $f(x) = x^3 - x - 2$.

5. Ekuazio linealen sistemen ebazpena

1. (a) $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, non $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = 12, \quad \|\mathbf{A}\|_\infty = 12.$$

$$\kappa_1(\mathbf{A}) = 40, \quad \kappa_\infty(\mathbf{A}) = 46.$$

2. (a) $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$ ebatziz, $\mathbf{y} = [-4 \ 12 \ 3]^t$ dugu, eta $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ ebatziz, $x = [-3 \ 2 \ 1]^t$. Beraz, sistemaren soluzioa era bektorialean $x = (-3, 2, 1)$ da.

3. (a) $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ez da hertsiki diagonal menperatzaile, izan ere $|a_{22}| \not> |a_{21}| + |a_{23}|$. (Matrize simetriko bat hertsiki diagonal menperatzaile bada eta diagonaleko gai guztiak positiboak badira, definitu positiboa da).

$$\kappa_2(\mathbf{A}) \geq \frac{\max_i r_{ii}^2}{\min_i r_{ii}^2} = \frac{\max\{4, 1, 9\}}{\min\{4, 1, 9\}} = \frac{9}{1} = 9.$$

4. (b) Matrizea hertsiki diagonal menperatzailea denez, metodo hauek konbergitzen dira.

Jacobi-ren metodoa erabiliz: $\mathbf{x}_J^{(1)} = (2, 1.375, 0.75)$, $\mathbf{x}_J^{(2)} = (2.125, 0.9688, 0.9063)$, $\mathbf{x}_J^{(3)} = (2.0125, 0.9583, 1.0391)$.

Zehaztasun erlatiboa: $ze_J = 0.0660$.

Gauss-Seidel-en metodoa erabiliz: $\mathbf{x}_{GS}^{(1)} = (2, 0.875, 1.0313)$, $\mathbf{x}_{GS}^{(2)} = (1.9687, 1.0117, 0.9893)$, $\mathbf{x}_{GS}^{(3)} = (2.0045, 0.9975, 1.0018)$.

Zehaztasun erlatiboa: $ze_{GS} = 0.00179$.

Argi eta garbi $x = (2, 1, 1)$ soluziora jotzen du.

5. (a) Householder-en bektoreak: $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3.4495 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.9447 \\ -1.5266 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.4082 & -0.1231 & -0.9045 \\ -0.4082 & -0.8616 & 0.3015 \\ -0.8165 & 0.4924 & 0.3015 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -2.4495 & -6.5320 & 2.8577 \\ 0 & -2.7080 & -5.7853 \\ 0 & 0 & -2.7136 \end{bmatrix}.$$

(b) Householder-en bektoreak: $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2.7321 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.816 \\ -0.6343 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.5774 & -0.4082 & 0.7071 \\ 0.5774 & -0.8165 & 0 \\ 0.5774 & 0.4082 & 0.7071 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.7321 & -1.7321 & 0 \\ 0 & -2.4495 & -7.3485 \\ 0 & 0 & 8.4853 \end{bmatrix}.$$

6. (a) $\mathbf{Q}^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2.8577 \\ -11.2013 \\ -2.7136 \end{bmatrix}$.

Azkenik, $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^t \mathbf{b}$ ebatziz, $\mathbf{x} = [-3 \ 2 \ 1]^t$ lortzen da.

(b) $\mathbf{Q}^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -2.4495 \\ 8.4853 \end{bmatrix}$.

Azkenik, $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^t \mathbf{b}$ ebatziz, $\mathbf{x} = [3 \ -2 \ 1]^t$ lortzen da.

8. (a) $\mathbf{A}^t \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^t \mathbf{b}$ ebatziz, $\mathbf{x}^* = [21]^t$ lortzen dugu.

Bestalde, hondarraren norma euklidearra: $\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_2 = 2$.

9. (a) Householder-en bektoreak: $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3.2361 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.4721 \\ 0 \end{bmatrix}$.

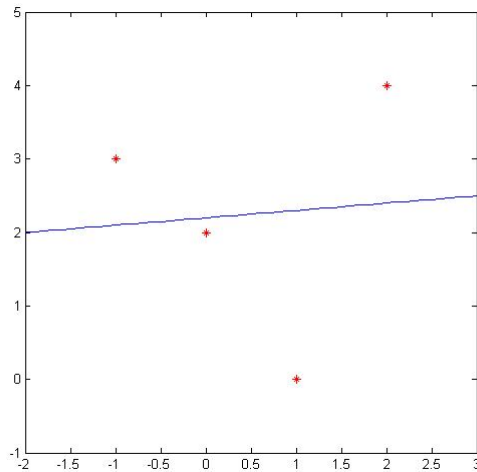
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.4472 & 0.8944 & 0 \\ -0.8944 & -0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -2.2361 & 2.2361 \\ 0 & 2.2361 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} -2.2361 & 2.2361 \\ 0 & 2.2361 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Q}^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2.2361 \\ 2.2361 \\ 2.0000 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{Q}^t \mathbf{b})_u = \begin{bmatrix} -2.2361 \\ 2.2361 \end{bmatrix} \text{ eta hondarra } (\mathbf{Q}^t \mathbf{b})_l = 2 \text{ da.}$$

Orain, $\mathbf{R}_u \mathbf{x} = (\mathbf{Q}^t \mathbf{b})_u$ sistema ebatziz, $\mathbf{x}^* = [2 \ 1]^t$ lortzen da. Hondarraren norma euklidearra 2 da (aurreko 8.(a) ariketan lortu dugunaren berdina, bete behar duen bezala).

11. (a) Horretarako $\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ problema ebatzi behar dugu, non $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ eta $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

baitira. Orduan \mathbf{x}^* aurkitu daiteke ekuazio normalak ebatziz: $\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^t \mathbf{b}$. Hortik $\mathbf{x}^* = [0.1 \ 2.2]^t$ lortzen da. Hondarraren norma euklidearra $\|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_2 = 2.9496$ da. Ondorioz, eskatutako ekuazio lineala hau da: $y = 0.1x + 2.2$.



13. (a) QR faktORIZAZIOA ERABILTZEN DA. $\mathbf{P} = \mathbb{1}$ hartuko dugu.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ -0.5774 & 0 & -0.8165 \\ -0.5774 & -0.7071 & 0.4082 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1.7321 & -1.7321 & -4.3301 \\ 0 & 1.4142 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Orduan $\mathbf{Q}_u = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.7071 \\ -0.5774 & 0 \\ -0.5774 & -0.7071 \end{bmatrix}$ matrizearen zutabeek $K(\mathbf{A})$ azpiespazioaren oinarri bektoriala osatzen dute.

(b) Bestalde, $\mathbf{Q}_l = \begin{bmatrix} 0.4082 \\ -0.8165 \\ 0.4082 \end{bmatrix}$ matrizearen zutabeak $K(\mathbf{A})^\perp$ azpiespazioaren oinarri bektoriala osatzen du.

(c) \mathbf{R} -ren egitura kontuan hartuz, $\mathbf{R}_{11} = \begin{bmatrix} -1.7321 & -1.7321 \\ 0 & 1.4142 \end{bmatrix}$ eta $\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} -4.3301 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$ (ikus apuntetako 5.13.2. atala). Bestalde $\mathbf{Q}^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5.1962 \\ -2.8284 \\ 0 \end{bmatrix}$, orduan $\mathbf{c} = [-5.1962 \ -2.8284]^t$ eta hondarra $d = 0$ da.

Orain $\mathbf{R}_{11} \mathbf{y}_B = \mathbf{c}$ ebatziz, $\mathbf{y}_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. Beraz,

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Kalkulatzeko \mathbf{x}_{LM} (5.58) adierazpena kontuan hartzen dugu. Bektore hau kalkulatu dugu:

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}_B - \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{12} \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} z.$$

Horretarako $\mathbf{R}_{11} \mathbf{w} = \mathbf{R}_{12}$ sistema ebatzen dugu, $\mathbf{w} = [2 \quad 0.5]$ lortuz. Hortaz,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 5 - 2z \\ -2 - 0.5z \\ z \end{bmatrix}$$

eta $\|\mathbf{q}\|_2^2 = f(z) = (5 - 2z)^2 + (-2 - 0.5z)^2 + z^2 = 5.25z^2 - 18z + 29$ funtzio horren minimoa $z^* = 1.7143$ da. Ondorioz, zera dugu:

$$\mathbf{x}_{LM} = \begin{bmatrix} 5 - 2 \cdot 1.7143 \\ -2 - 0.5 \cdot 1.7143 \\ 1.7143 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5714 \\ -2.8571 \\ 1.7143 \end{bmatrix}.$$

6. Ekuazio ez-linealen sistemen ebazpena

1. Sistema ebatzeko 6.1. algoritmoari jarraitzen diogu.

$$\mathbf{x}_0 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^t \text{ dugu eta } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad f_3(\mathbf{x})]^t.$$

Lau iteraziotan, $\mathbf{x}_4 = [0.7852 \quad 0.4966 \quad 0.3699]^t$ lortzen da eta $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_4)\|_\infty = 5.4758 \cdot 10^{-10}$.

3. $\mathbf{x}_0 = [1.2 \quad 1.2]^t$ badugu, $\mathbf{x}_1 = [1.1924 \quad 1.2218]^t$ eta $\mathbf{x}_2 = [1.1923 \quad 1.2216]^t$. Bestalde, $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\|_\infty = 6.1333 \cdot 10^{-8}$ dugu.

$\mathbf{x}_0 = [-0.2 \quad -0.2]^t$ badugu, $\mathbf{x}_1 = [-0.2905 \quad -0.1238]^t$ eta $\mathbf{x}_2 = [-0.2861 \quad -0.1182]^t$. Bestalde, $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\|_\infty = 3.1610 \cdot 10^{-5}$ dugu.

5. Hirugarren probleman $\mathbf{x}_0 = [1.2 \quad 1.2]^t$ kasurako Broyden-en metodoaren lehenengo bi iterazioak garatuko ditugu.

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 2.4 & -1 \\ -1 & 2.4 \end{bmatrix}.$$

1. iterazioan zera egiten da:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = [0.04 \quad -0.06]^t,$$

$$\mathbf{A}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5042 & 0.2101 \\ 0.2101 & 0.5042 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}_0 = -\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = [-0.007563 \quad 0.02185]^t,$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{s}_0 = [1.1924 \quad 1.2218]^t.$$

2. iterazioan zera egiten da: lehenengo, \mathbf{A}_1^{-1} lortzen dugu Broyden-en metodoaren urratsei jarraituz (ikus 6.2. algoritmoa).

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1} + \frac{(\mathbf{s}_0 - \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{y}_0) \mathbf{s}_0^t \mathbf{A}_0^{-1}}{\mathbf{s}_0^t \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{y}_0} \text{ kalkulatzeko hurrengoa egingo dugu:}$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = [0.04114 \quad 0.06128]^t,$$

$$\mathbf{z} = -\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{y}_0 = [-0.03362 \quad -0.03954]^t,$$

$$p = -\mathbf{s}_0^t \mathbf{z}_0 = 0.08816,$$

$$\mathbf{C} = \frac{(\mathbf{s}_0 + \mathbf{z}) \mathbf{s}_0^t \mathbf{A}_0^{-1}}{p} = \begin{bmatrix} 11.273 & 11.389 \\ 11.505 & 11.624 \end{bmatrix} \text{ eta}$$

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 11.78 & 11.60 \\ 11.72 & 12.13 \end{bmatrix}.$$

Orain \mathbf{x}_2 kalkulatu da:

$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = [-0.001514 \quad -0.002264]^t, \text{ eta azkenik,}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{s}_1 = [1.191 \quad 1.220]^t.$$

$$\text{Bestalde, } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\|_\infty = \|(-0.001519, -0.002264)\|_\infty = 0.002264.$$

8. (a) $f_1(1, 1) = 0$ eta $f_2(1, 1) = 0$ dugunez, $(1, 1)$ sistemaren soluzio bat da.

$f_1(-1, -1) = 0$ eta $f_2(-1, -1) = 0$ dugunez, $(-1, -1)$ sistemaren beste soluzio bat da.

(b) Jakobiarrak soluzioen inguruan ia singularrak direnez Newton-en sistema ebazteko baldintzaren arazoak izango ditugu.