3.5. Problemak

1. Bihurtu zenbaki bitar hauek zenbaki dezimal:

   (a) 10101_{bi}

   (b) 11111110_{bi}

   (c) 0.11011_{bi}

   (d) 0.1010101_{bi}

   (e) 1.0110101_{bi}

   (f) 11000101.101_{bi}

2. Bihurtu zenbaki dezimal hauek zenbaki bitar:

   (a) 23

   (b) 378

   (c) 0.6

   (d) 7/16

   (e) 23/32

   (f) 1/7

3. Idatzi 81, 66.25 eta -0.625 zenbakiak era hauetan:

   (a) Era bitarrean.

   (b) Koma mugikorreko era normalizatuan.

   (c) 32 bit-eko zehaztasun bakuneko kate baten bidez (IEEE-754 estandarrean).

4. Idatzi 256.1875, -30952 eta -0.0032 zenbakiak era hauetan:

   (a) Era bitarrean.

   (b) Koma mugikorreko era normalizatuan.

   (c) 64 bit-eko zehaztasun bikoitzeko kate baten bidez (IEEE-754 estandarrean).

5. Aurkitu $R - 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_{7bi}$ hurbiltze-errorea, zazpi zifra esangarriko hurbilpen bitar hauetan:

   (a) $R = 1/10 \approx 0.0001100_{bi}$

   (b) $R = 1/7 \approx 0.0010010_{bi}$

6. Serie geometriko konbergenteen baturaren formula erabiliz, frogatu $1/7 = 0.\overline{001}_{bi}$ garapen bitarra eta $\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \ldots$ baliokideak direla.

7. Serie geometriko konbergenteen baturaren formula erabiliz, frogatu $1/5{=}0.\overline{0011}_{bi}$ garapen bitarra eta $\dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{16} + \dfrac{3}{256} + \dfrac{3}{4096} + \ldots$ baliokideak direla.

8. Zehaztu zer gertatzen den, lau zifrako mantisa duen ordenagailu batek eragiketa hauek egiten dituenean:

   (a) $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\right) + \dfrac{1}{6}$

   (b) $\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{5}$

   (c) $\left(\dfrac{3}{17} + \dfrac{1}{9}\right) + \dfrac{1}{7}$

   (d) $\left(\dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{9}\right) + \dfrac{1}{7}$

9. Aurkitu E_x errore absolutua eta R_x errore erlatiboa, eta zehaztu hurbilpenaren zifra esangarrien kopurua kasu hauetan:

   (a) $x = 2.71828182$, $\widehat{x} = 2.7182$.

   (b) $y = 98350$, $\widehat{y} = 98000$.

   (b) $z = 0.000068$, $\widehat{z} = 0.00006$.

10. Bete ezazu kalkulu hau:

$$p = \int_0^{1/4} e^{x^2} dx \approx \int_0^{1/4} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}\right) dx = \widehat{p}.$$

    Esan zein errore mota gertatzen den eta konparatu $\widehat{p}$ emaitza egiazko balioarekin: $p = 0.2553074606$.

11. (a) Jo dezagun $p_1 = 1.414$ eta $p_2 = 0.09125$ datuak, lau zifra esangarriko zehaztasunarekin emanda daudela. Egoera horretan, aurkitu $p_1 + p_2$ eta $p_1 p_2$ eragiketei dagozkien emaitzak.

    (b) Jo dezagun $p_1 = 31.415$ eta $p_2 = 0.027182$ datuak, bost zifra esangarriko zehaztasunarekin emanda daudela. Egoera horretan, aurkitu $p_1 + p_2$ eta $p_1 p_2$ eragiketei dagozkien emaitzak.

12. Bukatu kalkulu hauek eta esan nolako errorea gertatzen den:

    (a) $\dfrac{\sin(\pi/4 + 0.00001) - \sin(\pi/4)}{0.00001} = \dfrac{0.70711385222 - 0.70710678119}{0.00001} = \ldots$

    (b) $\dfrac{\ln(2 + 0.00005) - \ln(2)}{0.00005} = \dfrac{0.69317218025 - 0.69314718056}{0.00005} = \ldots$

13. Hiru zifrako eta biribiltzeko koma mugikorreko aritmetika erabiliz, kalkula itzazu batura hauek (batu adierazten den ordenan):

(a) $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^k}$.

(b) $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{3^{7-k}}$.

14. Izan bitez Tayloren garapen hauek:

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + O(h^4)$$

eta

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6).$$

Aurkitu horien baturaren eta biderkaduraren hurbiltze-ordenak.

15. Izan bitez Tayloren garapen hauek:

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + +O(h^7)$$

eta

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6).$$

Aurkitu horien baturaren eta biderkaduraren hurbiltze-ordenak.

16. Demagun $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ funtzioa.

(a) Erabili formatu hamartarra, sei digitu esangarrirekin (biribilduz), $f(0.007)$ kalkulatzeko (kalkulagailua erabiliz).

(b) Erabili MATLAB (`format long` erabiliz) $f(x)$-ren balioa kalkulatzeko, eta benetako errore erlatiboa, biribiltzearen ondorioz, (a) atalean lortutako $f(x)$-ren balioarekiko.

(c) Biderkatu $f(x)$ funtzioa $\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$ adierazpenaz, biribiltze-errorea izateko joera gutxiago duen $f(x)$-ren era bat lortzeko. Era berrian, erabili sei digitu esangarritako formatu hamartarra (biribilduz) $f(0.007)$ kalkulatzeko (kalkulagailua erabiliz). Konparatu balioa, (a) eta (b) ataletan lorturiko balioekin.

17. Demagun $f(x) = \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$ funtzioa.

(a) Erabili formatu hamartarra sei digitu esangarrirekin (biribilduz) $f(0.005)$ kalkulatzeko (kalkulagailua erabiliz).

(b) Erabili MATLAB (`format long` erabiliz) $f(x)$-ren balioa kalkulatzeko, eta benetako errore erlatiboa, biribiltzearen ondorioz, (a) atalean lortutako $f(x)$-ren balioarekiko.

(c) Biderkatu $f(x)$ funtzioa $\dfrac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{9+x}+3}$ adierazpenaz, biribiltze-errorea izateko joera gutxiago duen $f(x)$-ren era bat lortzeko. Era berrian, erabili sei digitu esangarritako formatu hamartarra (biribilduz) $f(0.005)$ kalkulatzeko (kalkulagailua erabiliz). Konparatu balioa (a) eta (b) ataletan lorturiko balioekin.

18. Honako kasu hauetan aurkitu formula baliokide bat zifra esangarrien galera saihesteko:

(a) $\ln(x+1) - \ln(x)$, x handi baterako.

(b) $\sqrt{x^2+1} - x$, x handi baterako.

(c) $\cos^2(x) - \sin^2(x)$, $x \approx \pi/4$ baterako.

(d) $\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}$, $x \approx \pi$ baterako.

19. Izan bitez adierazpen hauek:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad q(x) = ((x-3)x+3)x - 1, \quad r(x) = (x-1)^3.$$

(a) Lau zifrako koma mugikorreko aritmetika erabiliz eta biribilduz, kalkula itzazu $p(2.72)$, $q(2.72)$ eta $r(2.72)$. $p(x)$-ren kalkuluan, hartu $(2.72)^3 = 20.12$ eta $(2.72)^2 = 7.398$.

(b) Lau zifrako koma mugikorreko aritmetika erabiliz eta biribilduz, kalkula itzazu $p(0.975)$, $q(0.975)$ eta $r(0.975)$. $p(x)$-ren kalkuluan, hartu $(0.975)^3 = 0.9268$ eta $(0.975)^2 = 0.9506$.

20. *Bigarren mailako ekuazioaren ebazpenaren formula hobetua.* Demagun $a \neq 0$ eta $b^2 - 4ac > 0$ ditugula, eta jo dezagun $ax^2 + bx + c = 0$ ekuazioa. Haren erroak adierazpen ezagun hauen bidez kalkulatzen dira:

(a) $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ eta $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Frogatu erro horiek kalkula daitezkeela adierazpen baliokide hauen bidez:

(b) $x_1 = \dfrac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$ eta $x_2 = \dfrac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}$.

Oharra. $|b| \approx \sqrt{b^2-4ac}$ denean, kontuz ibili behar dugu ezeztatzearen bidezko zehaztasunaren galera saihesteko. Baldin $b > 0$ bada, x_1 erroa (b) formularen bidez kalkulatu beharko genuke, eta x_2 erroa (a) formulaz. Aldiz, $b < 0$ bada, x_1 erroa (a) formularen bidez kalkulatu beharko genuke, eta x_2 erroa (b) formula erabiliz.

21. Erabili formula egokia x_1 eta x_2 kalkulatzeko, aurreko ariketan azaltzen den bezala, bigarren mailako ekuazio hauen erroak aurkitzeko:

(a) $x^2 - 1000.001x + 1 = 0$.

(b) $x^2 - 100000.0001x + 1 = 0$.

(c) $x^2 - 100000.00001x + 1 = 0$.

22. Hau da $f(x) = e^x$ funtzioaren Tayloren seriearen garapena:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Erabili ekuazio hori e^{-2} kalkulatzeko, kasu hauetan:

(a) Lehenengo lau batugaiak erabiliz.

(b) Lehenengo sei batugaiak erabiliz.

(c) Lehenengo zortzi batugaiak erabiliz.

Kasu bakoitzean, kalkula ezazu trunkatze-errore absolutua eta errore erlatiboa. Erabili MATLAB, `format long` instrukzioaz, e^{-2}-ren benetako balioa kalkulatzeko. Erabili sei zenbaki esangarriko zenbaki hamartarrak (biribilduz), eragiketa guztietan.

23. Aztertu eragiketa hauen erroreen hedapena (begira ezazu 3.4.7. azpiatala):

(a) Hiru zenbakiren batura:

$$p + q + r = (\widehat{p} + \varepsilon_p) + (\widehat{q} + \varepsilon_q) + (\widehat{r} + \varepsilon_r).$$

(b) Zero ez den zenbaki baten alderantzizkoa:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\widehat{q} + \varepsilon_q}.$$

(c) Zero ez den zenbaki batez zatitzea:

$$\frac{p}{q} = \frac{\widehat{p} + \varepsilon_p}{\widehat{q} + \varepsilon_q}.$$

24. Erabili 20. eta 21. ariketen emaitzak algoritmo bat eta MATLABeko programa bat eraikitzeko, ekuazio koadratiko baten erroak kalkula ditzan egoera guztietan, $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$ kasuak sartuta.

25. 3.13. eta 3.14. adibideak kontuan hartuz, frogatu $\{1/2^n\}_{n=1}^{\infty}$ segidaren gaiak garatzeko hiru metodo hauek erabil ditzakegula:

(a) $r_0 = 1$ eta $r_n = \frac{1}{2} r_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$ izanik.

(b) $p_0 = 1$, $p_1 = 0.5$ eta $p_n = \frac{3}{2} p_{n-1} - p_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$ izanik.

(c) $q_0 = 1$, $q_1 = 0.5$ eta $q_n = \frac{5}{2} q_{n-1} - q_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$ izanik.

Orain, kasu bakoitzean hasierako errore txiki bat sortzen da:

(a) $r_0 = 0.994$.

(b) $p_0 = 1$, $p_1 = 0.497$.

(c) $q_0 = 1$, $q_1 = 0.497$.

MATLAB erabiliz, sortu metodo bakoitzerako lehenengo 10 iterazioak eta aurkeztu emaitzak 3.1. eta 3.2. tauletan bezala (MATLABen bidez, hori ere).

Nolako errorea (egonkorra/ezegonkorra) gertatzen da kasu bakoitzean? Non txikitzen da errore hori?