3. gaia

Ordenagailuaren aritmetika eta errorearen analisia

Soluzio bat lortzeko erabiltzen dugun ordenagailua tresna inperfektua da. Izan ere, mugatuta dago hark duen gaitasuna zenbakiak zehaztasunez adierazteko. Ondorioz, makinak berak lortzen dituen emaitzek erroreak dituzte.

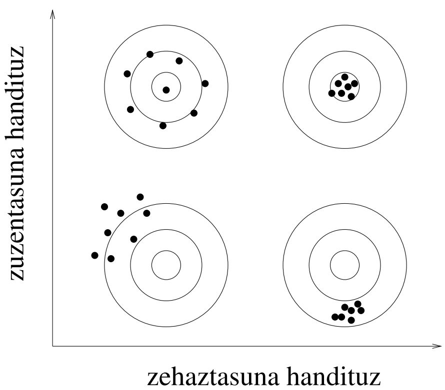
Bestalde, metodo hurbilduak erabiltzen baditugu, erroreak sortzen dira. Adibidez, abiaduraren deribatua kalkulatzeko (puenting-jauzilariaren adibidean bezala) diferentzia finituak erabiltzean:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Auzia da, beraz, nola maneiatu horrelako ziurgabetasuna.

3.1. Zuzentasuna eta zehaztasuna

Kalkuluekin eta neurriekin elkartutako erroreek beren zuzentasuna eta zehaztasuna dute ezaugarri. Nahiz eta hizkera arruntean bi hitz horiek sinonimoak izan, metodo zientifikoan ez dira berdinak. Neurri (edo kalkulu) sistema baten *zuzentasuna* da egiazko baliotik neurtutako (edo kalkulatutako) balio baten hurbiltasunaren gradua. Neurri (edo kalkulu) sistema baten *zehaztasuna* (errepikagarritasun ere esaten zaio) da baldintza berdinen menpean emaitza berdinak lortzeko gaitasuna.



Zuzentasunik eza (*zehartasun* ere baderitzo) egiazko baliotik desbideratze sistematikoa da. *Zehaztasunik eza* (*zihurgabetasun* ere esaten zaio) sakabanatzearen magnitudearekin erlazionatuta dago.

3.2. Algoritmoa

Ordenagailu bat erabiltzen denean problema baten zenbakizko soluzio bat lortzeko, programak gauzatzen ditu erabilitako zenbakizko metodoari elkartutako eragiketak. Zenbakizko metodo batzuk errazak dira inplementatzeko, baina batzuetan zenbakizko prozedurak zailak dira programatzeko.

Zenbakizko metodo bat programatu baino lehen, oso onuragarria da zenbakizko metodoa inplementatzeko jarraitu behar ditugun urrats guztiak planifikatzea. Horrelako plan bati *algoritmo* deritzogu, eta soluziora heltzeko urratsez urratseko instrukzioen bilduma da. Algoritmoak xehetasun maila batzuetan idatz daitezke. Adibidez, jo dezagun $ax^2 + bx + c = 0$ ekuazio koadratikoa ebatzi nahi dugula, soluzio hauek kalkulatuz, algoritmo batez:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.1. algoritmoa. Ekuazio koadratiko baten erro errealak ebazteko algoritmoa.

Ekuazio koadratikoaren a, b eta c konstanteak emanda daude.

1. Kalkulatu diskriminantearen balioa, $D = b^2 - 4ac$.
2. $D > 0$ bada, kalkulatu bi erroak goiko adierazpenak erabiliz.
3. $D = 0$ bada, kalkulatu $x = -b/2a$ erroa, eta erakutsi mezu hau: “Ekuazioak erro bakar bat du”.
4. $D < 0$ bada, erakutsi mezu hau: “Ekuazioak ez du erro errealik”.

Behin algoritmoa asmatuz gero, inplementa daiteke ordenagailuko programa batean.

3.3. Zenbaki bitarrak

Nahiz eta gizakiok zenbaki-sistema hamartarra erabili kalkulu aritmetikoetan, ordenagailu gehienek zenbaki-sistema bitarra erabiltzen dute. Ordenagailuak datu guztiak zenbaki bitar bihurtzen ditu. Kalkulu aritmetikoak 2 oinarrian egiten ditu, eta gero 10 oinarrira itzultzen ditu. Zehaztasuneko bederatzi zifra dezimal dauzkan ordenagailu batek emaitza hau eman zuen:

$$\sum_{i=1}^{100000} 0.1 = 9999.99447$$

Batura 10000 izan behar zenez, gure lanetariko bat izango da hura gertatzeko arrazoia jakitea.

3.3.1. Zenbaki oso bitarrak

Sistema hamartarrean, 1563 zenbakia era garatuan idatzita hau da:

$$1563 = (1 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (3 \times 10^0).$$

Baina, zenbaki bera sistema bitarrean idatzita hau da:

$$\begin{aligned} 1563 \;=\; & (1 \times 2^{10}) + (1 \times 2^9) + (0 \times 2^8) + (0 \times 2^7) + (0 \times 2^6) + (0 \times 2^5) \\ & +(1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) \end{aligned}$$

Beraz, $1563 = 11000011011_{bi}$ dugu.

Hau da beste adibide bat:

$$(111\ldots11)_2 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^1 + 2^0 = (2^n - 1),$$

Kontuan hartu behar dugu azken berdintza lortzeko $1+x+x^2+\ldots+x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ betetzen dela, $x \neq 1$ denean.

Nola lor dezakegu sistema bitarrera igarotzea?

1563 zenbakia birekin zatitzean hau ateratzen dugu:

$$1563 = 2 \times 781 + 1$$

Orain, 781 zenbakia birekin zatitzean hau ateratzen dugu:

$$781 = 2 \times 390 + 1$$

Eragiketa hori errepikatuz, zera lortzen da:

$$\begin{aligned} 390 &= 2 \times 195 + 0 \\ 195 &= 2 \times 97 + 1 \\ 97 &= 2 \times 48 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}48 &= 2\times 24+0\\24 &= 2\times 12+0\\12 &= 2\times 6+0\\6 &= 2\times 3+0\\3 &= 2\times 1+1\\1 &= 2\times 0+1\end{aligned}$$

eta behetik gorako hondarrak hartuz, zenbaki bitarra eraikitzen dugu: $1563{=}11000011011_{bi}$.

3.3.2. Zatiki bitarrak

R zenbaki erreal bat bada, non $0 < R < 1$, orduan $\{0,1\}$ multzoan badago $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ zifra segida bat hau betetzen duena:

$$R = (d_1 \times 2^{-1}) + (d_2 \times 2^{-2}) + \ldots + (d_n \times 2^{-n}) + \ldots. \tag{3.1}$$

Eskuineko adierazpena laburki emanda, hots, notazio zatikiar bitarrean, honela da:

$$R = 0.d_1d_2\ldots d_n\ldots_{bi}.$$

Askotan, zenbaki errealek 1 zifraren kopuru infinitu bat behar dute adierazpen bitarrean. Adibidez, 7/10, oinarri hamartarrean 0.7ren bidez adierazten da, baina bere adierazpen bitarrak 1 zifraren kopuru infinitu bat behar du:

$$\frac{7}{10} = 0.1\overline{0110}_{bi}$$

Zatiki hori periodikoa da: 0110 lau zifrako taldea errepikatu egiten da, bukaerarik gabe.

Orain, algoritmo eraginkor bat garatu dezakegu 2 oinarriko adierazpenak aurkitzeko. Birekin (3.1) adierazpena biderkatzen badugu, hau dugu:

$$2R = d_1 + (d_2 \times 2^{-1}) + \ldots + (d_n \times 2^{-n+1}) + \ldots,$$

non d_1 $2R$-ren zati osoa baita, $d_1 = \lfloor 2R \rfloor$. Adierazpen horren zatikia, $zat(2R)$, hau da:

$$Z_1 = zat(2R) = (d_2 \times 2^{-1}) + \ldots + (d_n \times 2^{-n+1}) + \ldots$$

eta (0,1) tartean dago. Azken adierazpen hori birekin biderkatuz, zera lortzen dugu:

$$2Z_1 = d_2 + (d_3 \times 2^{-1}) + \ldots + (d_n \times 2^{-n+2}) + \ldots$$

Berdintza horren zati osoa hartuz, hots, $d_2 = \lfloor 2Z_1 \rfloor$. Prozesua aurrera joango da, seguraski bukaerarik gabe (R-ren adierazpena 2 oinarrian ez bada finitua, ezta periodikoa ere), eta era errepikarian honela sortzen ditu $\{d_k\}$ eta $\{Z_k\}$ bi segidak:

$$\begin{aligned} d_k &= \lfloor 2Z_{k-1} \rfloor \\ Z_k &= zat(2Z_{k-1}) \end{aligned}$$

non $d_1 = \lfloor 2R \rfloor$ eta $Z_1 = zat(2R)$ baitira. Ondorioz, R-ren adierazpen bitarra serie konbergente honek ematen digu:

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} d_i (2)^{-i}$$

eta hau $1/2$ arrazoiko serie geometriko baten azpiseriea da.

3.1. adibidea. *Kalkulatu 7/10en adierazpen bitarra.*

Ebazpena. $R = 7/10 = 0.7$ denez, honela kalkulatuko dugu:

$$\begin{array}{lll} 2R = 1.4 & d_1 = \lfloor 1.4 \rfloor = 1 & Z_1 = zat(1.4) = 0.4 \\ 2Z_1 = 0.8 & d_2 = \lfloor 0.8 \rfloor = 0 & Z_2 = zat(0.8) = 0.8 \\ 2Z_2 = 1.6 & d_3 = \lfloor 1.6 \rfloor = 1 & Z_3 = zat(1.6) = 0.6 \\ 2Z_3 = 1.2 & d_4 = \lfloor 1.2 \rfloor = 1 & Z_4 = zat(1.2) = 0.2 \\ 2Z_4 = 0.4 & d_5 = \lfloor 0.4 \rfloor = 0 & Z_5 = zat(0.4) = 0.4 \\ 2Z_5 = 0.8 & d_6 = \lfloor 0.8 \rfloor = 0 & Z_6 = zat(0.8) = 0.8 \\ 2Z_6 = 1.6 & d_7 = \lfloor 1.6 \rfloor = 1 & Z_7 = zat(1.6) = 0.6 \end{array}$$

Ohartu $2Z_2 = 1.6 = 2Z_6$ dela. Beraz, $d_k = d_{k+4}$ eta $Z_k = Z_{k+4}$ patroiak errepikatuko dira $k = 2, 3, 4, \ldots$-tarako. Ondorioz, $7/10 = 0.1\overline{0110}_{bi}$.

Serie geometrikoa erabil dezakegu, adierazpen bitar bati dagokion zenbaki arrazional hamartarra kalkulatzeko.

3.2. adibidea. *Izan bedi $0.\overline{01}_{bi}$ zenbaki bitarra. Aurkitu zenbaki horri dagokion zenbaki arrazional hamartarra.*

Ebazpena. $0.\overline{01}_{bi}$ era garatuan idatziz, zera dugu:

$$\begin{aligned} 0.\overline{01}_{bi} &= (0 \times 2^{-1}) + (1 \times 2^{-2}) + (0 \times 2^{-3}) + (1 \times 2^{-4}) + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (2^{-2})^i = -1 + \sum_{i=0}^{\infty} (2^{-2})^i \\ &= -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

3.3. adibidea. Desplazamendu bitarra. *Demagun* $S = 0.00000\overline{11000}_{bi}$ *dela. Kalkula ezazu* S *zenbakia sistema hamartarrean.*

Ebazpena. Hau dugu:

$$2^5 S = 32S = 0.\overline{11000}_{bi}$$

Bestalde,

$$2^{10} S = 1024S = 11000.\overline{11000}_{bi}$$

Bigarren berdintzari lehenengoa kenduz:

$$1024S - 32S = 11000.\overline{11000}_{bi} - 0.\overline{11000}_{bi} = 11000_{bi} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 = 24,$$

eta orduan $992S = 24$, azkenik $S = 24/992 = 8/33$. □

3.3.3. Ordenagailuko zenbakiak

Ordenagailuek zenbaki errealetarako koma mugikorraren adierazpen bitarra erabiltzen dute. Zenbaki bitarrak 0 eta 1 digituek osatuta daudenez, puntuaren ezkerraldeko zenbakia 1 izateko normalizatzen dira beti. Beraz, *bit* (0 edo 1 digitu bitar bakoitza) hori ez da gorde behar (beti 1 baita). Ondorioz, zero ez diren zenbaki bitarrak honela gordeko dira:

$$\pm (1 + f) \times 2^e \tag{3.2}$$

f zenbakiari *mantisa* deritzogu eta adierazpen bitar finitua da; e zenbakiari *berretzaile* deritzogu. Ordenagailuek zenbaki errealen azpimultzo txiki bat soilik erabiltzen dute, zeren f eta e izan ditzaketen zifra bitarren kopurua murriztea beharrezkoa baita. Adibidez, demagun era honetako zenbaki erreal positiboen multzoa:

$$1.d_1 d_2 d_3 d_4\ {}_{bi} \times 2^e,$$

non $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \{0, 1\}$ eta $e \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Mantisarako $2^4 = 16$ aukera dugu eta berretzailerako 8 aukera ere, horrek 128 zenbakien multzo bat ematen digu:

$$\{1.0000_{bi} \times 2^{-3}, 1.0001_{bi} \times 2^{-3}, \ldots, 1.1110_{bi} \times 2^4, 1.1111_{bi} \times 2^4\}$$

non, esate baterako:

$$\begin{aligned}
1.0000_{bi} \times 2^{-3} &= 1 \times 2^{-3} = 0.1250 \\
1.1111_{bi} \times 2^4 &= (1 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}) \times 2^4 \\
&= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31.
\end{aligned}$$

Ordenagailu batek 4 zifrako mantisa batez soilik $(1/10 + 1/5) + 1/6$ eragiketa egin beharko balu, ordenagailuak zenbaki bitar hurbilenari biribilduko dio zenbaki erreal bakoitza; kasu honetan, hauek batzen ditu:

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{10} = 0.1 = \frac{1.6}{2^4} = 1.6 \times 2^{-4} = 1.\overline{1001}_{bi} \times 2^{-4} & \approx 1.1001_{bi} \times 2^{-4} & = 0.11001_{bi} \times 2^{-3} \\
\frac{1}{5} = 0.2 = \frac{1.6}{2^3} = 1.6 \times 2^{-3} = 1.\overline{1001}_{bi} \times 2^{-3} & \approx 1.1001_{bi} \times 2^{-3} & = 1.1001_{bi} \times 2^{-3}, \\
\text{batuz hau lortzen da:} & & \\
\frac{3}{10} & \approx & 10.01011_{bi} \times 2^{-3}
\end{array}$$

Ordenagailuak erabakitzen du nola gorde behar duen $10.01011_{bi} \times 2^{-3} = 1.001011_{bi} \times 2^{-2}$ zenbakia; demagun $1.0011_{bi} \times 2^{-2}$ zenbakian biribiltzen duela. Hurrengo urratsa hau da:

$$\begin{array}{lll} \frac{3}{10} = 0.3 & \approx 1.0011_{bi} \times 2^{-2} & = 1.0011_{bi} \times 2^{-2} \\ \frac{1}{6} = \frac{1.\overline{3}}{2^3} = 1.\overline{3} \times 2^{-3} = 1.\overline{01}_{bi} \times 2^{-3} & \approx 1.0101_{bi} \times 2^{-3} & = 0.10101_{bi} \times 2^{-2}, \end{array}$$

batuz hau lortzen da:

$$\frac{7}{15} \approx 1.11011_{bi} \times 2^{-2}$$

Ordenagailuak erabakitzen du nola gorde behar duen $1.11011_{bi} \times 2^{-2}$. Biribiltzen du $1.1110_{bi} \times 2^{-2}$ gordez. Beraz, hau da ordenagailuak batuketa problemari ematen dion soluzioa:

$$\frac{7}{15} \approx 1.1110_{bi} \times 2^{-2}.$$

Ordenagailuak sortutako errorea hau izan da:

$$\frac{7}{15} - 1.1110_{bi} \times 2^{-2} \approx -0.0021,$$

eta hori 7/15-en % 0.45 da.

3.3.4. Ordenagailu baten zehaztasuna

Mantisak 32 zifra baditu, 9 zifrarainoko zenbakiak gorde daitezke. Itzul gaitezen atalaren hasierara, ordenagailu baten bidez 1/10 elkarren ondoan 100000 bider batu nahi genuen lekura.

Demagun f mantisak 32 zifra bitar dauzkala. Beraz,

$$1 + f = 1.d_1 d_2 d_3 \dots d_{31} d_{32 bi}.$$

Zatiki bat era bitarrean adierazten badugu, adierazpen hori periodikoa izango da; adibidez:

$$\frac{1}{10} = 0.0\overline{0011}_{bi}.$$

Baina 32 zifrako mantisa bat erabiltzen dugunean, ordenagailuak trunkatzen du eta barneko hurbilpen gisa hau erabiltzen du:

$$\frac{1}{10} = 1.10011001100110011001100110011001_{bi} \times 2^{-4},$$

eta horren errorea, (hau da, aurreko bi zenbaki bitarren arteko diferentzia) hau da:

$$0.\overline{1001}_{bi} \times 2^{-36} \approx 8.731149137 \times 10^{-12}.$$

Arrazoi horregatik, ordenagailuak errore bat egin behar du, 1/10 zenbakia 100000 bider batzea eskatzen diogunean. Errore hori $(100000)(8.731149137 \times 10^{-12}) = 8.731149137 \times 10^{-7}$ izan behar zen gutxienez. Batura handitzen doan heinean, batura partzialak ere biribiltzen dira, eta batugaiak txikiak dira une horretan dagoen batura partzialarekin konparatuta. Ondorioz, trunkaketa gogorragoa da batugaiaren ekarpenerako. Errore horien guztien eragin konposatuak azken errore hau ematen du: $10000 - 9999.99447 = 5.53 \times 10^{-3}$.

3.3.5. Ordenagailuko koma mugikorreko zenbakiak

IEEE 754 koma mugikorreko aritmetikarako IEEE-ko estandarra da. Ordenagailuek bi modu dituzte zenbakiak adierazteko: *modu osoa* eta *koma mugikorreko modua*. Modu osoa erabiltzen da emaitza osoa izateko ziurtasuna duten eragiketak egiteko. Baina, normalean, zientzietan eta ingeniaritzan, koma mugikorraren adierazpenak erabiltzen dira; eta (3.2) adierazpena erabiltzeak mugak jartzen ditu f mantisako zifren kopuruaren eta e berretzailearen heinaren gainean.

Zehaztasun bakunarekin zenbaki errealak adierazteko, 32 zifra bitar (bit) erabiltzen dituzte ordenagailuek. Lehenengo bit-ak zenbakiaren zeinua gordetzen du (0 + da eta 1 - da). Hurrengo 8 bit-ak berretzailea gordetzeko erabiltzen dira. Eta azken 23 bit-ak mantisa gordetzeko erabiltzen dira. Horrek, zeroaz gain, 1.1755×10^{-38}tik 3.4028×10^{38}rainoko zenbaki errealak adierazten uzten du; hots, 2^{-126}tik $(2 - 2^{-23})2^{127}$raino. Zenbakien arteko tartearen luzera haien tamainaren mendekoa da. Gorde dezakegun mantisaren balio txikiena $2^{-23} = 1.1921E - 7$ da.

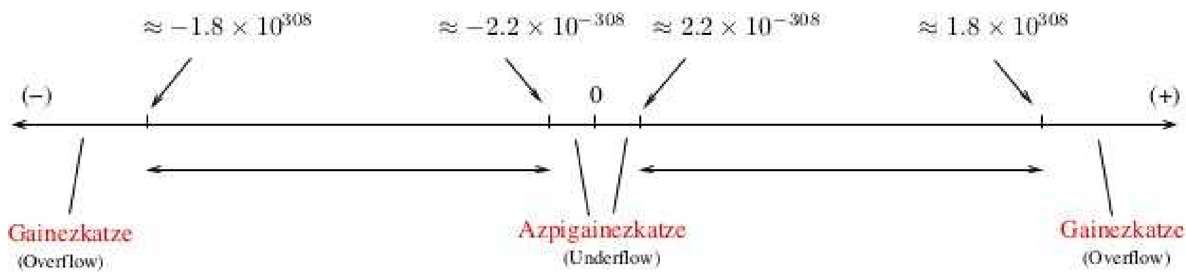
Ordenagailuak *zehaztasun bikoitzarekin* zenbaki errealak adierazteko 64 zifra erabiltzen ditu; orduan, lehenengo bit-a zenbakiaren zeinua gordetzeko, hurrengo 11 bit-ak berretzailerako, eta azken 52 bit-ak mantisarako. Beraz, esangarritasunak bit inplizitu 1 dauka (finko alde osoan) eta 52 bit esplizitu, guztira 53 bit; ondorioz, zehaztasun osoak 53 bit dauzka, hau da ≈ 16 digitu dezimal (16 digitu esangarri), $\log_{10}(2^{53})$. Balio handiena, `realmax`, hau da:

$$+1.1111\ldots1111_{bi} \times 2^{+1023} = (2 - 2^{-52}) \times 2^{+1023} = 1.7977 \times 10^{308}.$$

Eta balio positibo txikiena, `realmin`, hau da:

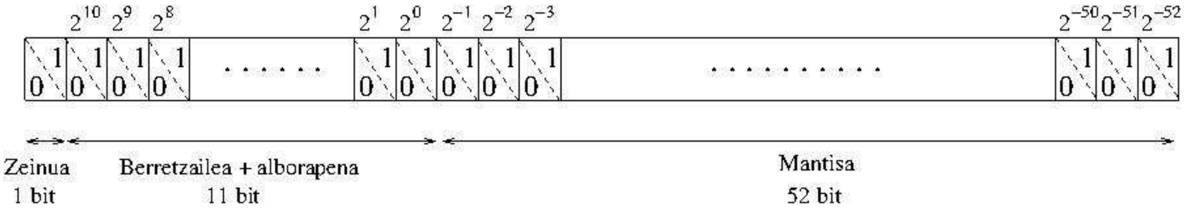
$$+1.0000\ldots0000_{bi} \times 2^{-1022} = 2.2251 \times 10^{-308}.$$

Zenbakien arteko tartearen luzera haien tamainaren mendekoa da. Mantisaren balio txikiena $2^{-52} = 2.2204 \times 10^{-16}$. Balio horrek makinaren zehaztasuna, `eps`, (edo makinaren errorea, ε_M) ematen du 1 tamainako zenbakietarako; hori da bi zenbakien artean egon daitekeen diferentzia txikiena. Zenbakiaren tamaina handiagoa denean, diferentzia hori handitu egiten da. MATLABek, berez, zehaztasun bikoitza erabiltzen du.



3.1. irudia. Zehaztasun bikoitzean adieraz daitezkeen zenbakien heina

Mantisaren balioa era bitarrean sartzen da. Berretzailearen balioa *alborapen* batekin sartzen da. Hemen, alborapenak esan nahi du berretzailearen balioari konstante bat batzen zaiola. Alborapena erabiltzen da berretzailearen zeinuan bit bat ez gastatzeko. Zehaztasun bikoitzean, notazio bitarrean 11 bitekin idatz dezakegun zenbaki handiena 2047 da (hots, 11 digituak 1 direnean). Erabiltzen den alborapena 1023 da (berretzaile txikiena 1 da). Hots, berretzailea 4 bada, gordetako balioa 4+1023=1027 izango da (1 gordeta badago, benetako berretzailea 1-1023=-1022 dugu). Beraz, ordenagailuan gordetako berretzaile txikiena -1022 izango da (1 bezala gordez) eta handiena 1024 izango da (2047 bezala gordez). Zehaztasun bakunean, non 8 bit erabiltzen baititugu, haiekin idatz dezakegun zenbaki handiena 255 da (hots, 11111111_{bi}); ondorioz, 127 da berretzailearen balioa gordetzeko alborapena.

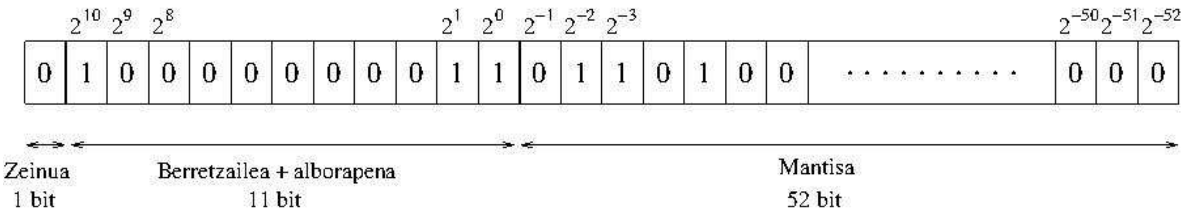


3.2. irudia. Zenbaki baten biltzea, notazio bitarrean, IEEE-754 estandarrean.

3.4. adibidea. *Ikus dezagun 22.5 zenbakia nola gordetzen den zehaztasun bikoitzean, IEEE-754 estandarraren arabera. Lehenengo, zenbakia normalizatzen da (hots, alde osoan 1 zenbakia jartzen da) honela:*

$$\frac{22.5}{2^4}2^4 = 1.40625 \times 2^4.$$

Zehaztasun bikoitzean, berretzailea alborapenarekin 4+1023=1027 da, zeina era bitarrean 10000000011_{bi} *gordetzen baita. Mantisa 0.40625 da, zeina era bitarrean* $.01101000_{bi}\ldots000$ *gordetzen baita. Zenbaki horren biltzea hau da:*



3.3. irudia. 22.5 zenbakiaren biltegia, notazio bitarrean, IEEE-754 estandarrean.

3.4. Errorearen analisia

Zenbakizko kalkuluaren praktikan, kontuan hartu behar dugu ordenagailuak lortutako emaitzak ez direla soluzio matematiko zehatzak. Hainbat faktorerengatik, zenbakizko soluzioaren zehaztasuna txikitu daiteke eta zailtasun hori ulertzeak maiz gidatu ahal gaitu zenbakizko algoritmo egokiak eraikitzera.

3.1. Definizioa. *Demagun $\widehat{p}$ balioa p-ren hurbilpen bat dela. Hurbilpenaren* ***errore absolutua*** $E_p = |p - \widehat{p}|$ *da eta* ***errore erlatiboa*** $R_p = |p - \widehat{p}|/|p|$, $p \neq 0$.

3.5. adibidea. *Izan bitez* $x = 3.141592$ *eta* $\widehat{x} = 3.14$*; orduan, errore absolutua hau da:*

$$E_x = |x - \widehat{x}| = |3.141592 - 3.14| = 0.001592$$

eta errore erlatiboa hau da:

$$R_x = \frac{|x - \widehat{x}|}{|x|} = \frac{0.001592}{3.141592} = 0.00507.$$

Koma mugikorreko adierazpenetan, nahiago da errore erlatiboaz lan egitea, hau mantisarekin zuzen erlazionatuta baitago.

3.2. Definizioa. $\widehat{p}$ *zenbakia d zifra dezimal esangarriko p-ren hurbilpen bat dela esango dugu, d zenbakia hau betetzen duen zenbaki arrunt handiena bada:*

$$\frac{|p - \widehat{p}|}{|p|} < \frac{10^{-d}}{2}.$$

3.6. adibidea. $x = 3.141592$ *eta* $\widehat{x} = 3.14$ *badira, orduan* $|x - \widehat{x}|/|x| = 0.000507 < 10^{-2}/2$. *Beraz,* $\widehat{x}$ *bi zifra esangarriko x-ren hurbilpena da.*

3.4.1. Trunkatze-errorea

Trunkatze-errorearen nozioa orokorki erlazionatuta dago adierazpen zail bat beste formula errazago batez ordezkatzearekin. Adibidez, funtzio bat Taylor-en polinomio batez ordezkatzen dugunean; esate baterako, adierazpen honen kasuan:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots,$$

bere integrala zenbakizko kalkuluen bitartez aurkitzeko orduan, lehenengo bost gaien baturarekin ordezka dezakegu: $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$.

3.4.2. Biribiltze-errorea

Ordenagailu batean, zenbaki errealen adierazpena mantisaren zifren kopuruak mugatuta dago; beraz, zenbaki batzuk ez dagozkie haien ordenagailu-adierazpenei. Hori da, hain zuzen, ***biribiltze-errore*** izenarekin ezagutzen dena. Aurreko atalean ikusi dugu nola $1/10 = 0.0\overline{0011}_{bi}$ trunkatzen zen ordenagailuan gordetzean. Datuak gordetzean, ordenagailuak biribiltze-erroreak sortzen ditu, eta segidako eragiketa batzuk egiten direnean zabaltzen dira.

3.4.3. Inaustea biribiltzearen aurrean

Izan bedi p zenbaki erreal bat, ***era dezimal normalizatu*** moduan honela adierazita:

$$p = \pm d_1.d_2d_3\ldots d_kd_{k+1}\ldots \times 10^n,$$

non $d_1 \in \{1,2,3,\ldots,8,9\}$ eta $d_j \in \{0,1,2,\ldots,8,9\}$, $j > 1$. Demagun k dela ordenagailu baten koma mugikorreko aritmetikan onartzen diren zifra dezimalen kopuru maximoa; orduan, p zenbaki erreala $fl_{ina}(p)$ makina-zenbakiaren bidez adierazten da, eta honela dago emanda:

$$fl_{ina}(p) = \pm d_1.d_2d_3\ldots d_k \times 10^n,$$

non $d_1 \in \{1,2,3,\ldots,8,9\}$ eta $d_j \in \{0,1,2,\ldots,8,9\}$, $1 < j \leq k$.

$fl_{ina}(p)$ makina-zenbakiari ***inausketa bidezko koma mugikorreko adierazpena*** deritzo edo ***p-ren azpiko biribiltzea***. Kasu honetan, $fl_{ina}(p)$-ren k-garren zifra p-ren k-garren zifra ere bada. Beste aukera bat p zenbakia k zifrekin adierazteko da $fl_{bir}(p)$ ***biribiltzearen bidezko koma mugikorreko adierazpena***, eta honela dago emanda:

$$fl_{bir}(p) = \pm r_1.r_2r_3\ldots r_k \times 10^n,$$

non $r_1 \in \{1,2,3,\ldots,8,9\}$ eta $r_j \in \{0,1,2,\ldots,8,9\}$, $1 < j \leq k$, eta r horiek kalkulatzen dira $d_1d_2d_3\ldots d_kd_{k+1}d_{k+2}\ldots$ biribilduz zenbaki osorik gertuenera. Adibidez, zenbaki erreal honek:

$$p = \frac{22}{7} = 3.142857142857142857\ldots,$$

sei zifra esangarriko koma mugikorreko adierazpen hauek:

$$fl_{ina}(p) = 3.14285 \times 10^0,$$
$$fl_{bir}(p) = 3.14286 \times 10^0.$$

Azken zifrak bederatzi badira, adibide hau dugu:

$$p = 0.23159963$$

orduan,

$$fl_{ina}(p) = 2.31599 \times 10^{-1},$$
$$fl_{bir}(p) = 2.31600 \times 10^{-1}.$$

Ordenagailu gehienek erabiltzen dute biribiltzearen bidezko koma mugikorreko adierazpena.

3.4.4. Zifra esangarrien ezeztapena

Jo dezagun $p = 3.1415926536$ eta $q = 3.1415957341$ zenbakiak berdintsuak direla, eta 11 zifra dezimaleko zehaztasunez adierazita daudela. Haien kendura kalkulatzen badugu, $p - q = -0.0000030805$, ikusiko dugu p eta q-ren lehenengo sei zifrak berdinak direla; bere diferentziak $p-q$ bost zifra dezimal bakarrik dauzka; fenomeno horri ***zifra esangarrien ezeztapena*** edo ***galera*** deritzogu, eta kontuz ibili behar dugu, zeren konturatu gabe kalkulatutako azken emaitzaren zehaztasuna txikiagotu egin baitezake.

3.7. adibidea. *Izan bitez* $f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ *eta* $g(x) = x/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ *algebraikoki funtzio baliokideak (egiaztatu). Konparatuko ditugu* $f(500)$ *eta* $g(500)$*, sei zifra esangarriko biribiltzea erabiliz.*

Ebazpena. Lehenengo funtzioarekin hau lortzen dugu:

$$f(500) = 500(\sqrt{501} - \sqrt{500}) = 500(22.3830 - 22.3607) = 500(0.0223) = 11.1500.$$

Orain, $g(x)$-rekin zera dugu:

$$g(500) = \frac{500}{\sqrt{501} + \sqrt{500}} = \frac{500}{22.3830 + 22.3607} = \frac{500}{44.7437} = 11.1748.$$

Bigarrenaren errore absolutua txikiagoa da. Hori da lortuko genukeena $11.174755300747198\ldots$ emaitza zehatza sei zifra esangarrietara biribilduz.

Horner-en metodoa

Polinomio bat balioztatzeko orduan, emaitza hobeak lortuko ditugu Horner-en metodoa (biderkadura ahokatua) erabiltzen badugu.

Izan bedi $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$ polinomioa; demagun haren balioa x_0 baliorako, $p(x_0)$, kalkulatu nahi dugula. Hori lortzeko, segida hau definituko dugu:

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n x_0 \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + b_{n-1} x_0 \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + b_2 x_0 \\
b_0 &= a_0 + b_1 x_0,
\end{aligned}$$

orduan, $p(x_0)$-ren balioa b_0 da.

Metodoa ulertzeko, ohartu polinomioa biderkadura ahokatu hau bezala idatz dezakegula:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n x)\ldots))).$$

Gero, b_i banan-banan ordezkatuz, zera dugu:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + x_0(a_3 + \ldots + x_0(a_{n-1} + b_n x_0)\ldots))) \\ &= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + x_0(a_3 + \ldots + x_0(b_{n-1})\ldots))) \\ &\vdots \\ &= a_0 + x_0(a_1 + x_0 b_2) \\ &= a_0 + x_0 b_1 \\ &= b_0 \end{aligned}$$

3.8. adibidea. *Izan bitez $P(x) = -1 + 3x - 3x^2 + x^3$ eta $Q(x) = -1 + x(3 + x(-3 + x))$. Hiru zifra esangarritarako biribiltzea erabiliz, $P(2.19)$ eta $Q(2.19)$ kalkulatuko ditugu eta bi hurbilpen horiek konparatuko ditugu benetako balioekin, $P(2.19) = Q(2.19) = 1.685159$.*

Ebazpena:

$$\begin{aligned} P(2.19) &= (2.19)^3 - 3(2.19)^2 + 3(2.19) - 1 \\ &\approx -1 + 6.57 - 14.4 + 10.5 = 1.67 \end{aligned}$$

Horner-en metodoaz, honela kalkulatzen da:

$$\begin{aligned} b_3 &= a_3 = 1 \\ b_2 &= a_2 + b_3 x_0 = -3 + 1(2.19) = -0.81 \\ b_1 &= a_1 + b_2 x_0 = 3 - 0.81(2.19) \approx 1.23 \\ b_0 &= a_0 + b_1 x_0 \approx -1 + 1.23(2.19) \approx 1.69, \end{aligned}$$

hots, $Q(2.19) \approx 1.69$.

Errore absolutuak 0.015159 eta 0.004841 dira, hurrenez hurren. Beraz, $Q(2.19) \approx 1.69$ hurbilpena hobea da. □

3.4.5. $O(h^n)$ hurbiltze-ordena

Jakin badakigu $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ eta $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ segidak konbergenteak direla; hala ere, lehenengoak bigarrenak baino azkarrago jotzen du zerora. Jarraian, segida baten konbergentziaren azkartasuna deskribatzeko beharrezko terminologia eta notazioa sartuko ditugu.

3.3. Definizioa. *$f(h)$ funtzioa $h \to 0$ denean $g(h)$ ordenakoa dela esango dugu, eta $f(h) = O(g(h))$ idatziko, C eta c konstanteak existitzen direnean, non hau betetzen baita:*

$$|f(h)| \leq C|g(h)|, \qquad |h| \leq c \ \text{ bada.}$$

3.9. adibidea. *Izan bitez* $f(x) = x^3 + 2x^2$ *eta* $g(x) = x^2$*. Izan ere,* $|x| \leq 1$*-erako* $x^3 \leq x^2$ *da,* $|x| \leq 1$*-erako* $x^3 + 2x^2 \leq 3x^2$ *lortzen dugu. Beraz,* $f(x) = O(g(x))$*.* $\square$

Landau-ren $O(\cdot)$ notazioa deritzo eta infinituetarako limiteetan ere erabiltzen da. Oso erabilgarria da funtzio baten handitzearen abiadura deskribatzeko, funtzio ezagun batekin konparatzea (x^n, $x^{1/n}$, a^x, $\log_a x$, eta abar).

Segiden konbergentziaren abiadura antzeko era batean ere deskriba dezakegu.

3.4. Definizioa. *Izan bitez* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eta* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *segidak.* $\{x_n\}$ *segida* $\{y_n\}$ *ordenakoa dela esaten da eta* $x_n = O(y_n)$ *idazten,* C *eta* N *konstanteak existitzen badira, non hau betetzen baita:*

$$|x_n| \leq C|y_n|, \qquad n \geq N \quad \textit{bada.}$$

3.10. adibidea. $\dfrac{n^2-1}{n^3} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$*; izan ere,* $\dfrac{n^2-1}{n^3} \leq \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n}$*,* $n \geq 1$ *bada.* $\square$

3.5. Definizioa. *Demagun* $p(h)$ *funtzioak beste* $f(h)$ *funtzio bat hurbiltzen duela, eta existitzen direla* $M > 0$ *zenbaki erreal bat eta* n *zenbaki arrunt bat non hau betetzen baita:*

$$\frac{|f(h) - p(h)|}{|h^n|} \leq M, \qquad h \quad \textit{nahiko txiki baterako.}$$

Orduan, $p(h)$ *funtzioak* $f(h)$ *hurbiltzen duela esaten da* $O(h^n)$ *hurbiltze-ordenarekin, eta honela idazten da:*

$$f(h) = p(h) + O(h^n).$$

Goiko desberdintza $|f(h) - p(h)| \leq M|h^n|$ *bezala idatziz,* $O(h^n)$ *adierazpenak* $M|h^n|$ *errore-bornearen lekua betetzen duela dakusagu.*

3.1. Teorema. *Demagun* $f(h) = p(h) + O(h^n)$ *eta* $g(h) = q(h) + O(h^m)$*, eta izan bedi* $r = \min\{m, n\}$*. Orduan:*

$$\begin{aligned} f(h) + g(h) &= p(h) + q(h) + O(h^r), \\ f(h)g(h) &= p(h)q(h) + O(h^r), \\ f(h)/g(h) &= p(h)/q(h) + O(h^r), \qquad g(h) \neq 0 \ \textit{eta} \ q(h) \neq 0 \quad \textit{badira.} \end{aligned}$$

Oso interesgarria da aintzat hartzea $f(x)$ funtzioaren Tayloren polinomioen bidezko n-garren hurbilpena $p(x)$ den kasua. Orduan Tayloren formularen hondarra $O(h^{n+1})$-ren bidez adierazten da, eta idatzi gabeko gai guztiak ordezkatzen ditu, hau da, h^{n+1} berreketa daukana eta goi-ordenakoak. Tayloren formularen hondarrak jotzen du zerora $h \to 0$ denean, h^{n+1}-en abiadura berdinarekin, adierazpen honek erakusten duen bezala:

$$O(h^{n+1}) \approx Mh^{n+1} \approx \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

zeina baliozkoa baita h nahiko txikia denean. Beste hitz batzuetan esanda, $O(h^{n+1})$ gaiak Mh^{n+1} kopurua ordezkatzen du, non M konstantea baita.

3.2. Tayloren teorema. *Demagun $f \in C^{n+1}[a,b]$. Baldin x_0 eta $x = x_0 + h$ $[a,b]$ tartean badaude, orduan, hau betetzen da:*

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i + O(h^{n+1}).$$

Kalkuluetan propietate hauek erabiltzen dira:

(i) $O(h^p) + O(h^p) = O(h^p)$.

(ii) $O(h^p) + O(h^q) = O(h^r)$, non $r = \min\{p, q\}$.

(iii) $O(h^p)O(h^q) = O(h^s)$, non $s = p + q$.

Honako adibide honek 3.1. teorema argitzen du.

3.11. adibidea. *Izan bitez Tayloren garapen hauek:*

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + O(h^4) \quad \textit{eta} \quad \cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6).$$

Aurki itzazu baturaren eta biderkaduraren hurbiltze-ordenak.

Ebazpena:

$$\begin{aligned} e^h + \cos(h) &= 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + O(h^4) + 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^6) \\ &= 2 + h + \frac{h^3}{3!} + O(h^4) + \frac{h^4}{4!} + O(h^6). \end{aligned}$$

Eta $O(h^4) + \frac{h^4}{4!} = O(h^4)$ eta $O(h^4) + O(h^6) = O(h^4)$ direnez, zera dugu:

$$e^h + \cos(h) = 2 + h + \frac{h^3}{3!} + O(h^4),$$

eta, ondorioz, $O(h^4)$ hurbiltze-ordena da.

Biderkaduran, antzeko eran egiten da.

$$\begin{aligned}
e^h \cos(h) &= \left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+O(h^4)\right)\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}+O(h^6)\right) \\
&= \left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}\right)\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}\right) \\
&\quad + \left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}\right)O(h^6)+\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}\right)O(h^4) \\
&\quad + O(h^4)O(h^6) \\
&= 1+h-\frac{h^3}{3}-\frac{5h^4}{24}-\frac{h^5}{24}+\frac{h^6}{48}+\frac{h^7}{144} \\
&\quad + O(h^6)+O(h^4)+O(h^4)O(h^6).
\end{aligned}$$

Izan ere, $O(h^4)O(h^6) = O(h^{10})$ eta hau betetzen da:

$$-\frac{5h^4}{24}-\frac{h^5}{24}+\frac{h^6}{48}+\frac{h^7}{144}+O(h^6)+O(h^4)+O(h^{10}) = O(h^4),$$

honako erlazio hau lortzen da:

$$e^h \cos(h) = 1+h-\frac{h^3}{3}+O(h^4).$$

Ondorioz, biderkadura $O(h^4)$ hurbiltze-ordenakoa da. □

3.4.6. Segida baten hurbiltze-ordena

3.6. Definizioa. *Demagun* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *dugula eta* $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ *segida bat dela, non* $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. *Orduan, esango dugu* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *segidak* x*-ra jotzen duela* $O(r_n)$ *hurbiltze-ordenarekin,* $K > 0$ *konstante bat existitzen bada hau betetzen duena:*

$$\frac{|x_n - x|}{|r_n|} \leq K \quad n \text{ nahiko handi baterako.}$$

Hori $x_n = x + O(r_n)$ *idatziz adieraziko dugu, edo* $x_n \to x \quad O(r_n)$ *hurbiltze-ordenarekin.*

3.12. adibidea. *Izan bitez* $x_n = \cos(n)/n^2$ *eta* $r_n = 1/n^2$*, orduan,* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad = O(1/n^2)$ *hurbiltze-ordenarekin. Hori erlazio honetatik ateratzen da:*

$$\frac{|\cos(n)/n^2|}{|1/n^2|} = |\cos(n)| \leq 1 \quad n \text{ guztietarako.} \quad \square$$

3.4.7. Errorearen hedapena

Atal honetan aztertuko dugu nola heda daitezkeen erroreak segidako eragiketen kate batean. Jo ditzagun p eta q zenbakien batura (balio zehatzak izanik), haien $\widehat{p}$ eta $\widehat{q}$ balio hurbilduak, eta azken horien erroreak, ε_p eta ε_q, hurrenez hurren. Hots, $p = \widehat{p}+\varepsilon_p$ eta $q = \widehat{q}+\varepsilon_q$. Batura horiek gaiez gai batuz, hau dugu:

$$p + q = (\widehat{p} + \varepsilon_p) + (\widehat{q} + \varepsilon_q) = (\widehat{p} + \widehat{q}) + (\varepsilon_p + \varepsilon_q).$$

Beraz, batuketa batean, errorea da batugaien erroreen batura.

Biderketa batean, errorearen hedapena konplexuagoa da. Biderkadura hau da:

$$pq = (\widehat{p} + \varepsilon_p)(\widehat{q} + \varepsilon_q) = \widehat{p}\widehat{q} + \widehat{p}\varepsilon_q + \widehat{q}\varepsilon_p + \varepsilon_p\varepsilon_q.$$

Beraz, $|\widehat{p}|$ eta $|\widehat{q}|$ 1 baino handiagoak badira, $\widehat{p}\varepsilon_q$ eta $\widehat{q}\varepsilon_p$ gaiek handitu ditzakete jatorrizko ε_p eta ε_q erroreak. Berrordenatuz, hau lortuko dugu:

$$pq - \widehat{p}\widehat{q} = \widehat{p}\varepsilon_q + \widehat{q}\varepsilon_p + \varepsilon_p\varepsilon_q.$$

Demagun $p \neq 0$ eta $q \neq 0$; orduan, zera betetzen da:

$$R_{pq} = \frac{pq - \widehat{p}\widehat{q}}{pq} = \frac{\widehat{p}\varepsilon_q + \widehat{q}\varepsilon_p + \varepsilon_p\varepsilon_q}{pq} = \frac{\widehat{p}\varepsilon_q}{pq} + \frac{\widehat{q}\varepsilon_p}{pq} + \frac{\varepsilon_p\varepsilon_q}{pq}. \tag{3.3}$$

Gainera, suposatzen badugu $\widehat{p}$ eta $\widehat{q}$ p-ren eta q-ren hurbilpen onak direla, orduan, $\widehat{p}/p \approx 1$, $\widehat{q}/q \approx 1$ eta $R_pR_q = (\varepsilon_p/p)(\varepsilon_q/q) \approx 0$ (R_p eta R_q $\widehat{p}$-ren eta $\widehat{q}$-ren errore erlatiboak dira). Hurbilpen horiek (3.3) adierazpenean ordezkatuz, hau dugu:

$$R_{pq} = \frac{pq - \widehat{p}\widehat{q}}{pq} \approx \frac{\varepsilon_q}{q} + \frac{\varepsilon_p}{p} = R_q + R_p.$$

Beraz, $\widehat{p}\widehat{q}$ biderkadurari dagokion errore erlatiboa, gutxi gora behera, $\widehat{p}$ eta $\widehat{q}$ faktoreei dagozkien errore erlatiboen batura da.

Normalean, datuen hasierako erroreak hedatzen dira eragiketen kate batean zehar. Edozein zenbakizko prozesutan, kualitate desiragarria da hasierako baldintzetako errore txiki batek azken emaitzan errore txikiak eragitea. Algoritmo batek propietate hori badauka, *egonkorra* dela esango dugu; bestela, *ezegonkorra* deritzo. Ahal den neurrian, metodo egonkorrak aukeratuko ditugu.

3.7. Definizioa. *Demagun ε hasierako errore bat dela, eta $\varepsilon(n)$ adierazpenak n eragiketa ondoren errore horren hazkuntza adierazten duela. Baldin $|\varepsilon(n)| \approx n\varepsilon$ bada, hazkuntza lineala dela esaten da. Baldin $|\varepsilon(n)| \approx K^n\varepsilon$ bada, hazkuntza esponentziala dela esaten da. Baldin $K > 1$ bada, orduan, $n \to \infty$ denean, errore esponentziala bornerik gabe hazten da; baina, $0 < K < 1$ bada, orduan, $n \to \infty$ denean, errore esponentzialak zerora jotzen du.*

Ondorengo bi adibideen bitartez ikusten da hasierako errore bat modu egonkorrean edo ezegonkorrean heda daitekeela. Lehenengoan hiru algoritmo aurkezten dira, eta ikusiko dugu hiru horien bidez segida berdina lortuko genukeela, eragiketak era zehatzean egingo bagenitu. Bigarrenean, hastapen-baldintzetako errore txikien hedapena aztertuko dugu.

3.13. adibidea. *Erakutsiko dugu* $\{1/3^n\}_{n=0}^{\infty}$ *segidaren gaiak hiru eskema desberdin erabiliz gara ditzakegula.*

Ebazpena. Izan bitez hiru adierazpen hauek:

$$
\begin{array}{llll}
r_0 = 1 & & r_n = \dfrac{1}{3} r_{n-1} & n = 1, 2, \ldots \\[2ex]
p_0 = 1, & p_1 = \dfrac{1}{3} & p_n = \dfrac{4}{3} p_{n-1} - \dfrac{1}{3} p_{n-2} & n = 2, 3, \ldots \\[2ex]
q_0 = 1, & q_1 = \dfrac{1}{3} & q_n = \dfrac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2} & n = 2, 3 \ldots,
\end{array}
$$

$\{r_n\}$-rena bistan dago. Jarraian egiaztatuko dugu $\{p_n\}$ segidan diferentzien kendurak $p_n = A(1/3^n) + B$ soluzio orokorra daukala.

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{3} p_{n-1} - \frac{1}{3} p_{n-2} &= \frac{4}{3}\left(\frac{A}{3^{n-1}} + B\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{A}{3^{n-2}} + B\right) \\
&= \left(\frac{4}{3^n} - \frac{3}{3^n}\right) A + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{3}\right) B = A\frac{1}{3^n} + B = p_n.
\end{aligned}
$$

$A = 1$ eta $B = 0$ hartzen baditugu, $p_0 = 1$ eta $p_1 = 1/3$ ditugu, eta hori da gure segida.

Jarraian egiaztatuko dugu $\{q_n\}$ segidan diferentzien kendurak $q_n = A(1/3^n) + B3^n$ soluzio orokorra daukala.

$$
\begin{aligned}
\frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2} &= \frac{10}{3}\left(\frac{A}{3^{n-1}} + B3^{n-1}\right) - \left(\frac{A}{3^{n-2}} + B3^{n-2}\right) \\
&= \left(\frac{10}{3^n} - \frac{9}{3^n}\right) A + (10 - 1)3^{n-2} B \\
&= A\frac{1}{3^n} + B3^n = q_n.
\end{aligned}
$$

$A = 1$ eta $B = 0$ hartzen baditugu, $q_0 = 1$ eta $q_1 = 1/3$ ditugu, eta horrek gure segida garatzen du. □

3.14. adibidea. $\{x_n\} = \{1/3^n\}$ *segidaren hurbilpenak garatuko ditugu adierazpen hauek* *erabiliz:*

$$r_0 = 0.99996 \qquad r_n = \frac{1}{3} r_{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 0.33332 \quad p_n = \frac{4}{3} p_{n-1} - \frac{1}{3} p_{n-2} \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 0.33332 \quad q_n = \frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2} \quad n = 2, 3 \ldots,$$

$\{r_n\}$ kasuan r_0-ren errorea 0.00004 da. $\{p_n\}$ eta $\{q_n\}$ kasuetan p_1-en eta q_1-en errorea $0.00001\overline{3}$ *da. Hastapen baldintzetako errore txiki horien hedapena aztertuko dugu.*

3.1. taula. $\{x_n\} = \{1/3^n\}$ segida eta bere hurbilpenak.

n	x_n	r_n	p_n	q_n
0	1.0000000000	0.9999600000	1.0000000000	1.0000000000
1	0.3333333333	0.3333200000	0.3333200000	0.3333200000
2	0.1111111111	0.1111066667	0.1110933330	0.1110666667
3	0.0370370370	0.0370355556	0.0370177778	0.0369022222
4	0.0123456790	0.0123451852	0.0123259259	0.0119407407
5	0.0041152263	0.0041150617	0.0040953086	0.0029002469
6	0.0013717421	0.0013716872	0.0013517695	-0.0022732510
7	0.0004572474	0.0004572291	0.0004372565	-0.0104777503
8	0.0001524158	0.0001524097	0.0001324188	-0.0326525834
9	0.0000508053	0.0000508032	0.0000308063	-0.0983641945
10	0.0000169351	0.0000169344	-0.0000030646	-0.2952280648

$\{r_n\}$-ren errorea egonkorra da eta era esponentzialean txikitzen da. $\{p_n\}$-ren errorea egonkorra da. $\{q_n\}$-ren errorea ezegonkorra da eta abiadura esponentzialarekin handitzen da. Nahiz eta $\{p_n\}$-ren errorea egonkorra izan, haren gaiek $n \to \infty$ denean $p_n \to 0$ betetzen dutenez, epe luzean errorea menperatu egiten da, eta p_8-tik aurrerako zifra esangarriak ez daude ados x_n-ri dagozkienekin. Ikus 3.1. eta 3.2. taulak.

3.4.8. Datuen ziurgabetasuna

Errealitatean agertzen diren problemen datuek ziurgabetasunak edo erroreak dauzkate. Errore mota hori *zarata* izenarekin ezagutzen da, eta datu horietan oinarritzen den edozein zenbakizko kalkuluren zehaztasunari eragiten dio. Ezin dugu hobetu kalkuluen zehaztasuna, zaratak erasandako datuekin eragiketak gauzatzen baditugu. Beraz, d zifra esangarri dauzkaten datuekin hasten bagara, orduan, datu horien bidez lortutako emaitzak d zifra

3.2. taula. Erroreen segidak.

n	$x_n - r_n$	$x_n - p_n$	$x_n - q_n$
0	0.0000400000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.0000133333	0.0000133333	0.0000133333
2	0.0000044444	0.0000177778	0.0000444444
3	0.0000014815	0.0000192593	0.0001348148
4	0.0000004938	0.0000197531	0.0004049383
5	0.0000001646	0.0000199177	0.0012149794
6	0.0000000549	0.0000199726	0.0036449931
7	0.0000000183	0.0000199909	0.0109349977
8	0.0000000061	0.0000199970	0.0328049992
9	0.0000000020	0.0000199990	0.0984149998
10	0.0000000007	0.0000199997	0.2952449999

esangarriekin erakutsi beharko lirateke. Adibidez, demagun $p_1 = 4.152$ eta $p_2 = 0.07931$ datuek lau zifrako zehaztasuna daukatela; orduan, tentagarria izango litzateke kalkulagailu baten pantailan agertzen diren zifra guztiak ematea, esate baterako, haien batuketa egitean: $p_1 + p_2 = 4.23131$. Baina hori ez da zuzena, ez genituzke emaitzak erabili beharko, horiek jatorrizko datuek baino zifra esangarri gehiago baldin badituzte. Hau izango litzateke emaitza egokia egoera horretan: $p_1 + p_2 = 4.231$.