1. gaia

Sarrera

1.1. Problema bat duzu

Demagun puenting-enpresa batek zure zerbitzuak kontratatu nahi dituela; hau da zure lana: jauzilariaren erortzeko abiadura, denboraren funtzioan (erorketa librean), aurretik jakitea. Informazio hori erabiliko da zehazteko (beste analisi handiago batean) masa desberdineko jauzilarientzako kordaren luzera eta erresistentzia.

Zuk badakizu, Fisika ikasketei esker, Newtonen bigarren legearen arabera $a = F/m$ erlazioa bete behar zuela. Baina, Fluidoen Mekanikari buruzko ezagupenen arabera, eredu matematiko hau garatzen duzu:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2, \tag{1.1}$$

non v = abiadura bertikala baita, t = denbora (s), g = grabitate-azelerazioa (≈ 9.81 m/s^2), c_d = airearen erresistentzia-koefizientea (kg/m) eta m = jauzilariaren masa (kg).

Ekuazio diferentzial horren $v = v(t)$ soluzio analitiko edo zehatz bat kalkula dezakegu eta, $t = 0$ denean $v = 0$ dela hartzen badugu, hau da soluzio analitikoa:

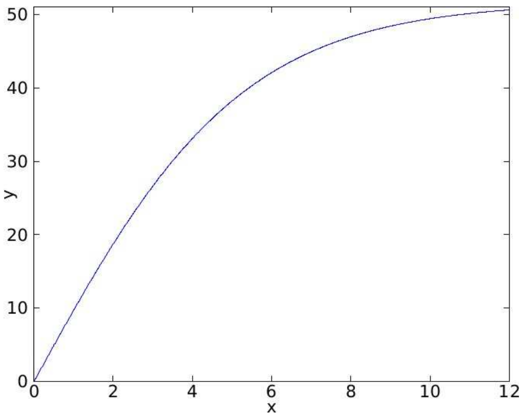
$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right), \tag{1.2}$$

non tangente hiperbolikoa (tanh) zuzen kalkula baitezakegu, edo funtzio esponentzialak erabiliz, adierazpen honetan:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1.1. adibidea. *68.1 kg-ko puenting jauzilari batek zubi batetik salto egiten badu erabili*

t (s)	v (m/s)
0	0
2	18.7292
4	33.1118
6	42.0762
8	46.9575
10	49.4214
12	50.6175
∞	51.6938



1.1. irudia. Abiadura-denbora grafikoa.

(1.2) adierazpena, bere abiadura erorketa librean 12 s-ko unean kalkulatzeko. Zein izango da azken abiadura, kordaren luzera infinitua bada? Erabili $c_d = 0.25$ *kg/m.*

Ebazpena. Parametroen balioak (1.2) adierazpenean ordezkatzen baditugu hau ematen du:

$$v(t) = \sqrt{\frac{9.81 \cdot 68.1}{0.25}} \tanh\left(\sqrt{\frac{9.81 \cdot 0.25}{68.1}} t\right) = 51.6938 \tanh(0.18977t),$$

eta hori erabil dezakegu taula hau kalkulatzeko:

Eredu honen arabera, jauzilariak azkar azeleratzen du, 49.4214 m/s-ko abiadura hartzen du 10. segundoan. Ohartu, baita ere, denbora nahiko handia denean 51.6983 m/s-ko azken abiadura hartzera jotzen duela. Abiadurak konstantea izatera jotzen du, zeren grabitatearen indarra orekatu egingo baita airearen erresistentziarekin. Beraz, indar garbia zero izango da eta azelerazioa gelditu egingo da. □

(1.2) ekuazioari *soluzio analitikoa* (edo *zehatza*) deritzogu, zehazki betetzen duelako jatorrizko ekuazio diferentziala. Zoritxarrez, badaude zehazki ebatzi ezin diren eredu matematikoak. Kasu askotan, dagoen aukera bakarra *zenbakizko soluzio* bat garatzea da, eta horrek soluzio zehatza hurbiltzen du.

Zenbakizko metodoetan problema matematiko bat birformulatzen da eragiketa aritmetikoen bidez ebazteko moduan. Hori argitu daiteke, (1.1) ekuaziorako honako hau kontuan hartuz:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \tag{1.3}$$

Ohartu $dv/dt \approx \Delta v/\Delta t$ hurbilpena dugula Δt finitua delako. Gogoratu Kalkulu Infinitesimalean hau betetzen dela:

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

(1.3) ekuazioari t-uneko deribatuaren *diferentzia finituen hurbilpena* deritzo. Hura ordezka dezakegu, (1.1) ekuazioan hau emateko:

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2$$

Ekuazio hori honela ordena dezakegu:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2 \right] (t_{i+1} - t_i) \tag{1.4}$$

Ohartu makoen arteko gaia (1.1) ekuazio diferentzialaren eskuineko gaia dela. Hau da, ekuazio horrek ematen digu bide bat v-ren malda kalkulatzeko. Ondorioz, ekuazioa honela berridatz dezakegu:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \frac{dv}{dt}(t_i) \cdot \Delta t \tag{1.5}$$

Orain, ekuazio diferentzialaren bidez beste ekuazio bat lortu dugu, zeina t_{i+1} uneko abiadura kalkulatzeko erabil baitezakegu aurreko t eta v-ren balioak erabiliz. Eta lortutako balioak, t_{i+1} eta v_{i+1}, erabil ditzakegu v_{i+2} kalkulatzeko, elkarren segidan. Hau da:

$$\textit{Balio berria} = \textit{balio zaharra} + \textit{malda} \;\times\; \textit{urratsaren luzera}$$

Metodo horri *Euleren metodoa* deritzogu.

1.2. adibidea. *Aurreko adibidean orain (1.5) ekuazioa erabiliko dugu abiadura kalkulatzeko. Urratsaren luzera 2 s izango da.*

Ebazpena. Hasieran $t_0 = 0$ hartuko dugu; orduan, jauzilariaren abiadura 0 da. Aurreko adibideko parametroen balioak erabiliz, $t_1 = 2$ s unean abiadura kalkulatuko dugu:

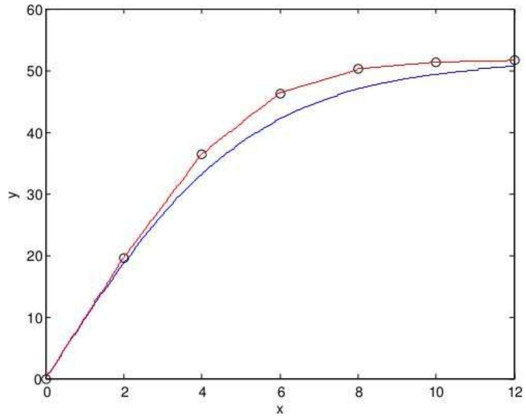
$$v = 0 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1} 0^2 \right] \times 2 = 19.62 \text{ m/s}$$

Hurrengo tarterako ($t = 2$-tik $t = 4$-ra), kalkuluak errepikatu eta hau lortuko dugu:

$$v = 19.62 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1} 19.62^2 \right] \times 2 = 36.4137 \text{ m/s}$$

Kalkuluaz horrela jarraituz, taula hau lortuko dugu:

t (s)	v (m/s)
0	0
2	19.6200
4	36.4137
6	46.2983
8	50.1802
10	51.3123
12	50.6008
∞	51.6938



1.2. irudia. Zenbakizko soluzioa eta soluzio analitikoa.