Solución a las Cuestiones y Problemas del Examen 3

1. *(1.5 ptos) Sea $*$ una ley de composición interna sobre un conjunto S. Demostrar que si existen $s, s' \in S$ elementos neutro a izquierda distintos, entonces no existe en S elemento neutro.*

Solución. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un elemento neutro que llamamos e. Entonces, como e es elemento neutro, se tiene

$$s * e = s \text{ y } s' * e = s' \tag{1}$$

Pero como s y s' son elementos neutros a izquierda, si tomamos como elemento x a e en la definición de elemento neutro a izquierda, se tiene

$$s * e = e \text{ y } s' * e = e \tag{2}$$

luego de (1) y (2), se sigue

$$s = s * e = e = s' * e = s',$$

lo que contradice el que s y s' sean distintos. Por tanto, no existe elemento neutro, si existen dos elementos neutros a izquierda distintos.

2. *(2 ptos) Sean L_1, L_2 y L_3 tres lenguajes sobre el mismo alfabeto X. Estudiar la relación que existe entre $(L_1 \cap L_2)L_3$ y $L_1L_3 \cap L_2L_3$.*

Solución. Estudiamos si $(L_1 \cap L_2)L_3 \subseteq L_1L_3 \cap L_2L_3$. Sea $\mathbf{x} \in (L_1 \cap L_2)L_3$. Entonces, $\mathbf{x} = \mathbf{yz}$, siendo $\mathbf{y} \in L_1 \cap L_2$ y $\mathbf{z} \in L_3$. Entonces, $\mathbf{y} \in L_1$ y $\mathbf{y} \in L_2$, luego $\mathbf{x} = \mathbf{yz} \in L_1L_3$ y $\mathbf{x} = \mathbf{yz} \in L_2L_3$, y, consecuentemente, $\mathbf{x} = \mathbf{yz} \in L_1L_3 \cap L_2L_3$. Por tanto,

$$(L_1 \cap L_2)L_3 \subseteq L_1L_3 \cap L_2L_3.$$

En cambio, el otro contenido no es cierto siempre. Por ejemplo, si tomamos $L_1 = \{ab\}$, $L_2 = \{a\}$ y $L_3 = \{b^j | j \in \mathbb{N}\}$, se tiene que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y, consecuentemente, $(L_1 \cap L_2)L_3 = \emptyset$. En cambio, $abb \in L_1L_3$, pues es la concatenación de $ab \in L_1$ y $b \in L_3$, y $abb \in L_2L_3$, pues es la concatenación de $a \in L_2$ y $bb \in L_3$, asi que $L_1L_3 \cap L_2L_3 \neq \emptyset$ y por tanto $L_1L_3 \cap L_2L_3 \not\subseteq (L_1 \cap L_2)L_3$.

3. *(2.5 ptos) Diseñar una máquina de Turing que al serle introducidos en la cinta con n '1' y m '1' escritos en casillas contiguas y separados por el símbolo & y el resto de las*

casillas en blanco con la cabeza lectora-inscriptora sobre una de las casillas no vacía en el estado e_0 devuelva tras su actuación $n-m$ '1', si $n > m$ o todas las casillas en blanco si $n \leq m$.

Solución. La estrategia que seguiremos para crear la máquina de Turing pedida será la siguiente:

1. Buscamos la casilla más a la derecha que tiene un '1'. Para ello, nos movemos por la cinta hacia la derecha. Sabremos que la hemos acabamos de pasar cuando nos encontremos en el estado e_0 con una casilla vacía, que denotaremos por s_0. Cuando encontremos esta casills en blanco, nos movemos hacia la izquierda y nos situamos con la cabeza lectora e inscriptora en la casilla más a la derecha que tiene un '1' en el estado e_1. Esto lo hacemos con los cuádruples:

$$\mathfrak{C}_1 = \{e_0 1 D e_0, e_0 \& D e_0, e_0 s_0 I e_1\}.$$

2. Borramos este '1' y nos movemos hacia la izquierda en busca del '1' situado en la primera casilla que está escrita. Los cuádruples que lo hacen son:

$$\mathfrak{C}_2 = \{e_1 1 s_0 e_2, e_2 s_0 I e_3, e_3 1 I e_3, e_3 \& I e_4, e_4 1 I e_4, e_4 s_0 D e_5\}.$$

3. Cuando nos situemos en la primera casilla escrita, borramos el '1' que aparece. Se usan los cuádruples:

$$\mathfrak{C}_3 = \{e_5 1 s_0 e_6, e_6 s_0 D e_0\}.$$

4. Si nos encontramos en el estado e_5 con el símbolo '&', significa que $n < m$ y por tanto lo que hay que hacer es borrar todas las casillas escritas. Para ello, necesitamos los cuádruples:

$$\mathfrak{C}_4 = \{e_5 \& s_0 e_7, e_7 s_0 D e_8, e_8 1 s_0 e_7\}.$$

Cuando borre todos los '1' y el & la máquina se va a parar porque no hay ningún cuádruple que comience por $e_8 s_0$.

5. Una vez que hemos ejecutado el paso 3, nos encontraremos en el estado e_0 sobre una casilla no vacía. Así que repetiremos el proceso. Si nos encontraramos en el estado e_1 con el símbolo & significa que se han acabado los m '1' de la sucesión. Por tanto, deberemos borrar el & y finalizar el proceso. Esto lo hacemos con el cuádruple:

$$\mathfrak{C}_5 = \{e_1 \& s_0 e_8\}.$$

En definitiva, la máquina buscada tiene por conjunto de símbolos a $S = \{1, s_0, \&\}$, por conjunto de estados a $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_8\}$ y por cuádruples a $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3 \cup \mathfrak{C}_4 \cup \mathfrak{C}_5$.

4. *(2 ptos) Se considera la máquina de Moore $M = (S_1, S_2, E, \delta, \beta)$, tal que $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{0, 1\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$ y funciones δ y β dadas por la siguiente tabla:*

	a	b	
e_1	e_6	e_6	*0*
e_2	e_4	e_6	*1*
e_3	e_3	e_3	*0*
e_4	e_5	e_6	*1*
e_5	e_2	e_6	*1*
e_6	e_3	e_3	*1*

(i) Hallar la tabla de computación de M para $x = bbaaba$, partiendo del estado e_1.

(ii) Hallar la máquina de Melay $\mathfrak{A}$ equivalente a M.

(iii) Minimizar $\mathfrak{A}$.

Solución. (i) Para calcular la tabla de computación debemos tener en cuenta que $\lambda(e, s) = \beta(\delta(e, s))$. Así que la tabla de computación pedida es:

b	b	a	a	b	a	
e_1	e_6	e_3	e_3	e_3	e_3	e_3
1	0	0	0	0	0	

(ii) La máquina de Melay $\mathfrak{A}$ pedida tiene por conjuntos S_1, S_2 y E a $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{0, 1\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$, por función próximo estado a δ, donde δ es la función próximo estado de la máquina de Moore y la función λ se define por $\lambda(e, s) = \beta(\delta(e, s))$. En concreto,

$$
\begin{array}{rccc}
\lambda : & E \times S_1 & \rightarrow & S_2 \\
& (e_1, a) & \mapsto & 1 \\
& (e_1, b) & \mapsto & 1 \\
& (e_2, a) & \mapsto & 1 \\
& (e_2, b) & \mapsto & 1 \\
& (e_3, a) & \mapsto & 0 \\
& (e_3, b) & \mapsto & 0 \\
& (e_4, a) & \mapsto & 1 \\
& (e_4, b) & \mapsto & 1 \\
& (e_5, a) & \mapsto & 1 \\
& (e_5, b) & \mapsto & 1 \\
& (e_6, a) & \mapsto & 0 \\
& (e_6, b) & \mapsto & 0
\end{array}
$$

(iii) Para minimizar $\mathfrak{A}$, debemos calcular en primer lugar el conjunto cociente $E/\sim$. Para ello, usaremos las relaciones de equivalencia $\sim_k$ definidas por

$$e \sim_k e' \Longleftrightarrow \psi(e,x) = \psi(e',x),\ \forall x \in \Omega_{S_1} \quad \text{tal que } l(x) \leq k,$$

donde $l(x)$ es la longitud de la palabra x. Sabemos que $E/\sim = E/\sim_r$ donde el índice r satisface $E/\sim_r = E/\sim_{r+1}$. Observamos que:

1. $E/\sim_1 = \{[e_1]_1, [e_3]_1\}$, siendo $[e_1]_1 = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$ y $[e_3]_1 = \{e_3, e_6\}$.

2. $E/\sim_2 = \{[e_1]_2, [e_2]_2, [e_3]_2\}$, siendo $[e_1]_2 = \{e_1\}$, $[e_2]_2 = \{e_2, e_4, e_5\}$ y $[e_3]_2 = \{e_3, e_6\}$.

3. $E/\sim_3 = \{[e_1]_3, [e_2]_3, [e_3]_3\}$, siendo $[e_1]_3 = \{e_1\}$, $[e_2]_3 = \{e_2, e_4, e_5\}$ y $[e_3]_3 = \{e_3, e_6\}$.

Por tanto, como $E/\sim_2 = E/\sim_3$, se sigue que $E/\sim = E/\sim_2 = \{[e_1], [e_2], [e_3]\}$, siendo $[e_1] = \{e_1\}$, $[e_2] = \{e_2, e_4, e_5\}$ y $[e_3] = \{e_3, e_6\}$ y el autómata que minimiza a $\mathfrak{A}$ tiene por conjunto de símbolos de entrada y salida a $S_1 = \{a, b\}$ y $S_2 = \{0, 1\}$, respectivamente, conjunto de estados a $\overline{E} = E/\sim$ y funciones $\overline{\delta}$ y $\overline{\lambda}$ definidas por

	a	b
$[e_1]$	$[e_3]/1$	$[e_3]/1$
$[e_2]$	$[e_2]/1$	$[e_3]/1$
$[e_3]$	$[e_3]/0$	$[e_3]/0$