Solución a las Cuestiones y Problemas del Examen 2

1. *(1.5 ptos) Se considera $S = \{a, b, c, d\}$ y $*$ una ley de composición interna que dota a S de la estructura de semigrupo. Se sabe que la tabla del semigrupo viene dada por:*

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d				

Calcular las entradas que faltan y buscar los elementos idempotentes, elemento(s) identidad a izquierda, a derecha y elemento(s) cero a izquierda, a derecha, si es que existen. ¿Está $*$ unívocamente determinada? Razona tu respuesta.

Solución. Como $(S, *)$ es un semigrupo, se debe cumplir la propiedad asociativa. Nos fijamos:

$$c*(b*a) = c*b = d, \quad c*(b*b) = c*a = c, \quad c*(b*c) = c*c = c, \quad c*(b*d) = c*d = d$$

y

$$(c*b)*a = d*a, \quad (c*b)*b = d*b, \quad (c*b)*c = d*c, \quad (c*b)*d = d*d$$

luego por la propiedad asociativa deducimos que

$$d*a = d, \quad d*b = c, \quad d*c = c, \quad d*d = d.$$

Los elementos idempotentes son: $\{a, c, d\}$, porque verfican $x*x = x$, para $x = a, c, d$. El elemento a es elemento identidad, y por tanto también será neutro a derecha e izquierda, ya que $a*y = y = y*a$, para $y = a, b, c, d$. Los elementos cero a derecha son c y d y no hay elementos cero a izquierda, por haber más de un elemento cero a derecha.

La operación $*$ está unívocamente determinada por ser $(S, *)$ un semigrupo.

2. *(2 ptos) Se considera $L = \{bab^j aba^k | j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Demostrar que L es un lenguaje regular y encontrar un semiautómata (S, E, δ) y un subconjunto $E_1 \subseteq E$ tal que L sea el lenguaje representado por (S, E, δ) respecto a E_1.*

Solución. L es un lenguaje regular porque es el lenguaje asociado a la expresión regular $\alpha = bab^*aba^*$. Para construir el semiautómata (S, E, δ), debemos proceder como se indica en el resumen teórico:

1. Paso 1: Construir $\beta = b_1 a_2 b_3^* a_4 b_5 a_6^*$ y $L_1 = |\beta|$.

2. Paso 2: Construir los conjuntos $I = \{b_1\}$, $F = \{b_5, a_6\}$ y

$$P = \{(b_1, a_2), (a_2, b_3), (a_2, a_4), (b_3, b_3), (b_3, a_4), (a_4, b_5), (b_5, a_6), (a_6, a_6)\}.$$

3. Paso 3: Definir el semiautómata con conjunto de símbolos $S = \{a, b\}$, conjunto de estados $E = \{e_1, \ldots, e_8\}$ y función δ definida por

$$\delta(e_1, a) = \emptyset = e_2,\ \delta(e_1, b) = \{b_1\} = e_3,\ \delta(e_2, a) = e_2,\ \delta(e_2, b) = e_2,$$

$$\delta(e_3, a) = \{a_2\} = e_4,\ \delta(e_3, b) = \emptyset = e_2,\ \delta(e_4, a) = \{a_4\} = e_5,\ \delta(e_4, b) = \{b_3\} = e_6,$$

$$\delta(e_5, a) = \{a_4\} = e_2,\ \delta(e_5, b) = \{b_5\} = e_7,\ \delta(e_6, a) = \{a_4\} = e_5,\ \delta(e_6, b) = \{b_3\} = e_6,$$

$$\delta(e_7, a) = \{a_6\} = e_8,\ \delta(e_7, b) = \emptyset = e_2,\ \delta(e_8, a) = \{a_6\} = e_8,\ \delta(e_8, b) = \emptyset = e_2.$$

4. Paso 4: Definimos el conjunto $E_1 = \{e_7, e_8\}$.

3. *(2 ptos) Diseñar una máquina de Turing que al serle introducida una sucesión de n '1' escritos en casillas contiguas y con la cabeza lectora-inscriptora sobre uno de ellos en el estado de partida e_0 devuelva la sucesión de '1' y otra sucesión situada a su izquierda que contenga $n + 2$ '1' escritos en casillas contiguas. Entre ambas sucesiones no se dejará ningun espacio en blanco.*

Solución. La estrategia que emplearemos para diseñar la máquina de Turing pedida será la siguiente:

1. Paso 1: Buscamos el '1' que se encuentre situado más a la derecha de la sucesión y lo cambiamos por el símbolo auxiliar x. Sabremos que es el situado más a la derecha porque la casilla contigua estará vacía (ésta la denotaremos por s_0). Los cuádruples que necesitaremos serán:

$$\mathfrak{C}_1 = \{e_0 1 D e_0, e_0 s_0 I e_1, e_1 1 x e_2\}.$$

2. Paso 2: Nos movemos hacia la izquierda hasta encontrar la primera casilla a la izquierda de la sucesión que esté vacía y colocamos en esa casilla una 'a'. Los cuadrúples que necesitaremos serán:

$$\mathfrak{C}_2 = \{e_2 x I e_2, e_2 1 I e_2, e_2 a I e_2, e_2 s_0 a e_3\}$$

3. Paso 3: Recorremos la sucesión de casillas escritas hacia la derecha hasta que encontremos la x que habíamos escrito, que cambiaremos por el símbolo '1'. Los cuadrúples que necesitaremos serán:

$$\mathfrak{C}_3 = \{e_3aDe_3, e_31De_3, e_3x1e_4\}$$

4. Paso 4: Examinamos la casilla que se encuentra a la izquierda de la casilla que acabamos de escribir. Si el símbolo que se encuentra es un '1', volvemos a repetir el proceso descrito. Si es una 'a', pasa al Paso 5 porque ya ha terminado de escribir por cada '1' de la sucesión inicial una 'a'. El único cuadrúple que necesitaremos será:

$$\mathfrak{C}_4 = \{e_41Ie_1\}$$

5. Paso 5: Si se encuentra con una 'a' en el estado e_1, lo que hará la máquina es cambiar las 'a' por '1' y cuando acabe añadirá dos '1' más en las dos casillas situadas a la izquierda de la sucesión que hemos creado. Los cuádruples que usaremos son:

$$\mathfrak{C}_5 = \{e_1a1e_5, e_51Ie_6, e_6a1e_5, e_6s_01e_7, e_71Ie_8, e_8s_01e_8\}$$

En definitiva, la máquina de Turing que hemos diseñado tiene por símbolos a $S = \{1, a, x, s_0\}$, por estados a $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_8\}$ y por cuádruples a $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3 \cup \mathfrak{C}_4 \cup \mathfrak{C}_5$.

4. *(3 ptos) Se considera el autómata $\mathfrak{A} = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$, donde $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{0, 1\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_7\}$ y δ y λ vienen dadas en la siguiente tabla:*

δ/λ	a	b
e_1	$e_1/0$	$e_7/0$
e_2	$e_2/0$	$e_7/0$
e_3	$e_5/0$	$e_1/0$
e_4	$e_6/0$	$e_2/0$
e_5	$e_5/1$	$e_3/0$
e_6	$e_6/1$	$e_4/0$
e_7	$e_1/0$	$e_6/1$

(i) Hallar la tabla de computación para $x = ababb$, partiendo del estado e_2.

(ii) Minimizar $\mathfrak{A}$.

(iii) Hallar un estado $e \in E_1$, donde E_1 es el conjunto de estados del autómata calculado en (ii), tal que la tabla de computación de la palabra $x = ababb$ partiendo del estado e presente la misma salida que la calculada en (i).

Solución. (i)

a	b	a	b	b	
e_2	e_2	e_7	e_6	e_4	e_2
0	0	0	0	0	

(ii) Para minimizar $\mathfrak{A}$, debemos calcular en primer lugar el conjunto cociente $E/\sim$. Para ello, usaremos las relaciones de equivalencia $\sim_k$ definidas por

$$e \sim_k e' \Longleftrightarrow \psi(e,x) = \psi(e',x),\ \forall x \in \Omega_{S_1} \quad \text{tal que } l(x) \leq k,$$

donde $l(x)$ es la longitud de la palabra x. Sabemos que $E/\sim = E/\sim_r$ donde el índice r satisface $E/\sim_r = E/\sim_{r+1}$. Observamos que:

1. $E/\sim_1 = \{[e_1]_1, [e_5]_1, [e_7]_1\}$, siendo $[e_1]_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $[e_5]_1 = \{e_5, e_6\}$ y $[e_7]_1 = \{e_7\}$.

2. $E/\sim_2 = \{[e_1]_2, [e_3]_2, [e_5]_2, [e_7]_2\}$, siendo $[e_1]_2 = \{e_1, e_2\}$, $[e_3]_2 = \{e_3, e_4\}$, $[e_5]_2 = \{e_5, e_6\}$ y $[e_7]_2 = \{e_7\}$.

3. $E/\sim_3 = \{[e_1]_3, [e_3]_3, [e_5]_3, [e_7]_3\}$, siendo $[e_1]_3 = \{e_1, e_2\}$, $[e_3]_3 = \{e_3, e_4\}$, $[e_5]_3 = \{e_5, e_6\}$ y $[e_7]_3 = \{e_7\}$.

Por tanto, como $E/\sim_2 = E/\sim_3$, se sigue que $E/\sim = E/\sim_2 = \{[e_1], [e_3], [e_5], [e_7]\}$, siendo $[e_1] = \{e_1, e_2\}$, $[e_3] = \{e_3, e_4\}$, $[e_5] = \{e_5, e_6\}$ y $[e_7] = \{e_7\}$ y el autómata que minimiza al dado tiene por conjunto de símbolos de entrada y salida a S_1 y S_2, respectivamente, conjunto de estados a $\overline{E} = E/\sim$ y funciones $\overline{\delta}$ y $\overline{\lambda}$ definidas por

	0	1
$[e_1]$	$[e_1]/0$	$[e_7]/0$
$[e_3]$	$[e_5]/0$	$[e_1]/0$
$[e_5]$	$[e_5]/1$	$[e_3]/0$
$[e_7]$	$[e_1]/0$	$[e_5]/1$

(iii) Basta considerar la clase de equivalencia a la que pertenece e_2, esto es $[e_1]$.