Solución a las Cuestiones y Problemas del Examen 1

1. *(2 ptos) Sean* $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_5^* \right\}$ *y* $H = S \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Se considera en ambos conjuntos como operación el producto usual de matrices.*

   (i) Demostrar que S *es un grupo abeliano*

   (ii) H *es un monoide conmutativo que contiene a* S*.*

   (iii)¿Cómo son los elementos neutros de ambos?

Solución. (i) S es grupo abeliano si cumple las propiedades asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro y existencia de elemento inverso. Tenemos:

1. Asociativa: $\forall \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ab)c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(bc) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

2. Conmutativa: $\forall \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$, se tiene

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Existencia de elemento neutro: El elemento $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ verifica que para todo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Existencia de elemento inverso: Como $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ es un grupo sabemos que dado $a \in \mathbb{Z}_5^*$, existe $a^{-1} \in \mathbb{Z}_5^*$ tal que $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$. Entonces, dada $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, el elemento inverso de $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Para probar que H es un monoide conmutativo, es suficiente probar que se cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y existencia de elemento neutro. Para probar la asociatividad y la conmutatividad basta proceder como en el apartado (i) teniendo en cuenta que ahora los elementos pueden ser bien de S ó el elemento $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por otro lado, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es elemento neutro de H, ya que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Los elementos neutros de S y H son diferentes. Observamos que el elemento neutro de S $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es elemento neutro de H porque

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y no es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Además, el elemento neutro de H no lo es cuando trabajamos sólamente con S porque no pertenece a S.

2. *(1 pto) Demostrar que si $(S, *)$ es un semigrupo, entonces se puede construir un semiautómata $(S, S, *)$. ¿Es cierto el recíproco?*

Solución. Para construir un semiautómata necesitamos una función $\delta : E \times S \to E$. Tomando $E = S$, se tiene que la operación interna $*$ verifica que es una aplicación de $S \times S$ en S y por tanto puede tomarse como la función δ próximo estado. El recíproco no es cierto puesto que aunque δ pueda tomarse como operación interna, no podemos garantizar que sea asociativa.

3. *(3 ptos) Diseñar una máquina de Turing que al serle introducida una sucesión de n '1' escritos en casillas contiguas y con la cabeza lectora-inscriptora sobre uno de ellos en el estado de partida e_0 devuelva la sucesión de '1' y otra sucesión situada a su izquierda que contenga 2n 'a' escritos en casillas contiguas. Entre ambas sucesiones* **no** *se dejará ningun espacio en blanco.*

Solución. La estrategia que emplearemos para diseñar la máquina de Turing pedida será la siguiente:

1. Paso 1: Buscamos el '1' que se encuentre situado más a la derecha de la sucesión y lo cambiamos por el símbolo auxiliar x. Sabremos que es el situado más a la derecha porque la casilla contigua estará vacía (ésta la denotaremos por s_0). Los cuádruples que necesitaremos serán:
$$\mathfrak{C}_1 = \{e_0 1 D e_0, e_0 s_0 I e_1, e_1 1 x e_2\}.$$

2. Paso 2: Nos movemos hacia la izquierda hasta encontrar la primera casilla a la izquierda de la sucesión que esté vacía y colocamos en esa casilla una 'a' y en la casilla contigua situada a su izquierda otra 'a'. Los cuadrúples que necesitaremos serán:
$$\mathfrak{C}_2 = \{e_2 x I e_2, e_2 1 I e_2, e_2 a I e_2, e_2 s_0 a e_3, e_3 a I e_3, e_3 s_0 a e_4\}$$

3. Paso 3: Recorremos la sucesión de casillas escritas hacia la derecha hasta que encontremos la x que habíamos escrito, que cambiaremos por el símbolo '1'. Los cuadrúples que necesitaremos serán:
$$\mathfrak{C}_3 = \{e_4 a D e_4, e_4 1 D e_4, e_4 x 1 e_5\}$$

4. Paso 4: Examinamos la casilla que se encuentra a la izquierda de la casilla que acabamos de escribir. Si el símbolo que se encuentra es un '1', volvemos a repetir el proceso descrito. Si es una 'a', la máquina debe pararse porque esto significa que ya ha terminado de escribir dos 'a' por cada '1' de la sucesión inicial. El único cuadrúple que necesitaremos será:
$$\mathfrak{C}_4 = \{e_5 1 I e_1\}$$
ya que si se encuentra en el estado e_1 con el símbolo '1', reiterará el proceso y si se encuentra con 'a' se parará porque no hay ningun cuádruple que comience por (e_1, a).

En definitiva, la máquina de Turing que hemos diseñado tiene por símbolos a $S = \{1, a, x, s_0\}$, por estados a $E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y por cuádruples a $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3 \cup \mathfrak{C}_4$.

4. *(1.5 ptos) Se considera $L = \{ba^j bab^k a | j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Demostrar que L es un lenguaje regular y encontrar un semiautómata (S, E, δ) y un subconjunto $E_1 \subseteq E$ tal que L sea el lenguaje representado por (S, E, δ) respecto a E_1.*

Solución. L es un lenguaje regular porque es el lenguaje asociado a la expresión regular $\alpha = ba^*bab^*a$. Para construir el semiautómata (S, E, δ), debemos proceder como se indica en el resumen teórico:

1. Paso 1: Construir $\beta = b_1a_2^*b_3a_4b_5^*a_6$ y $L_1 = |\beta|$.

2. Paso 2: Construir los conjuntos $I = \{b_1\}$, $F = \{a_6\}$ y

$$P = \{(b_1, a_2), (b_1, b_3), (a_2, a_2), (a_2, b_3), (b_3, a_4), (a_4, b_5), (a_4, a_6), (b_5, b_5), (b_5, a_6)\}.$$

3. Paso 3: Definimos el semiautómata con conjunto de símbolos $S = \{a, b\}$, conjunto de estados $E = \{e_1, \ldots, e_8\}$ y función δ definida por

$$\delta(e_1, a) = \emptyset = e_2,\ \delta(e_1, b) = \{b_1\} = e_3,\ \delta(e_2, a) = e_2,\ \delta(e_2, b) = e_2,$$

$$\delta(e_3, a) = \{a_2\} = e_4,\ \delta(e_3, b) = \{b_3\} = e_5,\ \delta(e_4, a) = \{a_2\} = e_4,\ \delta(e_4, b) = \{b_3\} = e_5,$$

$$\delta(e_5, a) = \{a_4\} = e_6,\ \delta(e_5, b) = \emptyset = e_2,\ \delta(e_6, a) = \{a_6\} = e_7,\ \delta(e_6, b) = \{b_5\} = e_8,$$

$$\delta(e_7, a) = \emptyset = e_2,\ \delta(e_7, b) = \emptyset = e_2,\ \delta(e_8, a) = \{a_6\} = e_7,\ \delta(e_8, b) = \{b_5\} = e_8.$$

4. Paso 4: Definimos el conjunto $E_1 = \{e_7\}$.