Problemas Seleccionados Resueltos: Aplicaciones de los autómatas: Lenguajes Formales

1. *Sea $\omega = x_1...x_t \in \Omega_X$. Se denota por $\omega^R = x_t x_{t-1}...x_1$. Demostrar que $(\omega^R)^i = (\omega^i)^R$, para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Solución. Lo demostramos empleando inducción sobre i. Es claro que $(\omega^R)^i = (\omega^i)^R$ se cumple para $i = 1$. Supongamos que es cierto para $i = n$ y lo vemos para $i = n+1$. Ahora,

$$(\omega^{n+1})^R = (\omega^n \omega)^R = \omega^R (\omega^n)^R = x_t x_{t-1}...x_1 (\omega^R)^n = (\omega^R)^{n+1}.$$

2. *Sea S un conjunto y Ł $= \{L \mid L$ es* lenguaje sobre el alfabeto *$S\}$. En Ł se considera la operación $\cdot$ $L_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1$ y $y \in L_2\}$. Demostrar que $L_\emptyset$ y L_Λ son elementos cero e identidad para la operación indicada. ¿Es $(Ł, \cdot)$ un semigrupo?*

Solución. Por definición $L_\emptyset = \emptyset$ y $L_\emptyset \cdot L_2 = L_\emptyset = L_1 \cdot L_\emptyset$, luego $L_\emptyset$ es elemento cero del sistema algebraico $(Ł, \cdot)$.

Por otro lado, $L_\Lambda = \{\Lambda\}$, donde Λ es la palabra vacía que satisface $\Lambda x = x = x\Lambda$, para cualquier palabra $x \in \Omega_S$. Entonces, $L_\Lambda \circ L = L = L \circ L_\Lambda$, así que L_Λ es elemento identidad del sistema algebraico $(Ł, \cdot)$.

Finalmente, $(Ł, \cdot)$ sí es un semigrupo puesto que la concatenación de palabras es asociativa.

3. *Se considera $L = \{aba^j b^k a(ba)^l | j, k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Demostrar que L es un lenguaje regular y encontrar un semiautómata (S, E, δ) y un subconjunto $E_1 \subseteq E$ tal que L sea el lenguaje representado por (S, E, δ) respecto a E_1.*

Solución. Observamos que $L = \{aba^j b^k a(ba)^l | j, k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ coincide con el lenguaje asociado a la expresión $\alpha = aba^* b^* a(ba)^*$. α es regular porque es la concatenación finita de expresiones regulares, luego L es regular. Para buscar el semiautómata que nos pide el enunciado procedemos de la siguiente manera:

1. Construimos la expresión β que se obtiene a partir de α indexando las letras que aparecen en α:
$$\beta = a_1 b_2 a_3^* b_4^* a_5 (b_6 a_7)^*.$$

2. Se construye el lenguaje regular L_1 asociado a β y buscamos los conjuntos formados por letras que son inicio de palabras (I), por letras que son final de palabras (F) y los pares de letras que figuran de forma consecutiva (P) en L_1. En concreto,

$$I = \{a_1\} \quad F = \{a_5, a_7\}$$

$$P = \{ \quad (a_1,b_2),(b_2,a_3),(b_2,b_4),(b_2,a_5),(a_3,a_3),(a_3,b_4),(a_3,a_5),$$
$$(b_4,b_4),(b_4,a_5),(a_5,b_6),(b_6,a_7),(a_7,b_6)\}$$

3. Se define el semiautómata S $= (S, E, \delta)$, donde S es el albabeto del lenguaje L, $E = \{e_1, \ldots, e_{11}\}$ y la función δ viene dada por:

$$\delta(e_1,a) = \{a_1\} = e_2,\ \delta(e_1,b) = \emptyset = e_3,\ \delta(e_2,a) = \emptyset = e_3,\ \delta(e_2,b) = \{b_2\} = e_4,$$

$$\delta(e_3,a) = \emptyset = e_3,\ \delta(e_3,b) = \emptyset = e_3,\ \delta(e_4,a) = \{a_3,a_5\} = e_5,\ \delta(e_4,b) = \{b_4\} = e_6,$$

$$\delta(e_5,a) = \{a_3,a_5\} = e_5,\ \delta(e_5,b) = \{b_4,b_6\} = e_7,\ \delta(e_6,a) = \{a_5\} = e_8,$$

$$\delta(e_6,b) = \{b_4\} = e_6,\ \delta(e_7,a) = \{a_5,a_7\} = e_9,\ \delta(e_7,b) = \{b_4\} = e_6,\ \delta(e_8,a) = \emptyset = e_3,$$

$$\delta(e_8,b) = \{b_6\} = e_{10},\ \delta(e_9,a) = \emptyset = e_3,\ \delta(e_9,b) = \{b_6\} = e_{10},\ \delta(e_{10},a) = \{a_7\} = e_{11},$$

$$\delta(e_{10},b) = \emptyset = e_3,\ \delta(e_{11},a) = \emptyset = e_3,\ \delta(e_{11},b) = \{b_6\} = e_{10}.$$

El conjunto está definido por $E_1 = \{e_5, e_8, e_9, e_{11}\}$.