# Problemas Seleccionados Resueltos: Máquinas secuenciales

1. *Determinar el número de semiautómatas distintos con conjunto de entradas $S$ y de salida $E$, siendo $|E| = n$ y $|S| = r$.*

**Solución.** Para determinar el número de semiautómatas distintos con conjunto de entradas $S$ y de salida $E$ que se puede construir es equivalente a contar el número de aplicaciones $\delta : E \times S \to E$ distintas que se puedan definir. Ahora, para que sea una aplicación a cada elemento de $E \times S$ se le debe asignar una única imagen. Por tanto, para cada elemento de $E \times S$ hay $n$ imágenes. Como hay $nr$ elementos en $E \times S$, se sigue que hay $n^{nr}$ aplicaciones $\delta$ distintas.

2. *Sea $A = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$ un autómata y $e, e' \in E$ dos estados equivalentes. Demostrar que $\delta(e, x)$ y $\delta(e', x)$ son equivalentes para cualquier $x \in \Omega_{S_1}$.*

**Solución.** Como $e, e' \in E$ son equivalentes sabemos que para cualquier $y \in \Omega_{S_1}$ se cumple

$$\psi_e(y) = \psi_{e'}(y).$$

Ahora, para ver que $\delta(e, x)$ es equivalente a $\delta(e', x)$ hay que probar que para todo $z \in \Omega_{S_1}$ se tiene

$$\psi_{\delta(e,x)}(z) = \psi_{\delta(e',x)}(z).$$

Pero si tomamos $y = xz$, de la equivalencia de $e$ y $e'$ sabemos que

$$\psi_e(xz) = \psi_{e'}(xz).$$

Además de la definición de $\psi$, deducimos que

$$\psi_e(xz) = \psi_e(x)\psi_{\delta(e,x)}(z)$$

y

$$\psi_{e'}(xz) = \psi_{e'}(x)\psi_{\delta(e',x)}(z)$$

luego

$$\psi_e(x)\psi_{\delta(e,x)}(z) = \psi_{e'}(x)\psi_{\delta(e',x)}(z)$$

y aplicando que $\psi_e(x) = \psi_{e'}(x)$, por ser $e$ y $e'$ equivalentes, se sigue

$$\psi_{\delta(e,x)}(z) = \psi_{\delta(e',x)}(z).$$

3. *Diseñar un autómata* $A = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$ *con* $S_1 = S_2 = \{0,1\}$ *que al introducir de forma sucesiva las letras de la palabra* $x = a_1 a_2 \dots a_t$*, con* $a_i \in S_1$*,* $i = 1, \dots t$ *y partiendo del estado* $e_0$ *ofrezca como salida la palabra* $00a_1a_2....a_{t-2}$*. Calcular la tabla de computación para la entrada* 100111*.*

**Solución.** Para diseñar este auómata nos fijamos que la dos primeras salidas deben ser 0 y a partir de la tercera posición es la entrada de dos posiciones anteriores. Usamos la siguiente idea: como en la palabra introducida sólo pueden aparecer 0 y 1, debemos imprimir siempre '0' salvo que hayamos recibido un '1' en la entrada dada en dos pasos previos. Para ello, definimos $E = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, la aplicación $\delta$ dada por:

$$\begin{array}{rccc} \delta: & E \times S_1 & \to & E \\ & (e_0, 0) & \mapsto & e_0 \\ & (e_0, 1) & \mapsto & e_1 \\ & (e_1, 0) & \mapsto & e_2 \\ & (e_1, 1) & \mapsto & e_3 \\ & (e_2, 0) & \mapsto & e_0 \\ & (e_2, 1) & \mapsto & e_1 \\ & (e_3, 0) & \mapsto & e_2 \\ & (e_3, 1) & \mapsto & e_3 \end{array}$$

y la aplicación $\lambda$ dada por:

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & E \times S_1 & \to & S_2 \\ & (e_0, 0) & \mapsto & 0 \\ & (e_0, 1) & \mapsto & 0 \\ & (e_1, 0) & \mapsto & 0 \\ & (e_1, 1) & \mapsto & 0 \\ & (e_2, 0) & \mapsto & 1 \\ & (e_2, 1) & \mapsto & 1 \\ & (e_3, 0) & \mapsto & 1 \\ & (e_3, 1) & \mapsto & 1 \end{array}$$

La tabla de computación pedida es

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_3$ | $e_3$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | |

4. *Se considera el autómata* $A = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$*, tal que* $S_1 = S_2 = \{0,1\}$*,* $E =$

$\{e_1, \ldots, e_6\}$ *y funciones* $\delta$ *y* $\lambda$ *dadas por la siguiente tabla:*

| | *0* | *1* |
|---|---|---|
| $e_1$ | $e_4/0$ | $e_2/1$ |
| $e_2$ | $e_1/1$ | $e_2/1$ |
| $e_3$ | $e_4/0$ | $e_5/1$ |
| $e_4$ | $e_1/1$ | $e_4/0$ |
| $e_5$ | $e_3/1$ | $e_5/1$ |
| $e_6$ | $e_2/1$ | $e_4/0$ |

*(i) Hallar la tabla de computación para* $x = 01101$*, partiendo del estado* $e_3$*.*

*(ii) Minimizar el autómata anterior.*

*(iii) Hallar un estado* $[e] \in \overline{E}$*, donde* $\overline{E}$ *es el conjunto de estados del autómata calculado en (iii), tal que la tabla de computación de la palabra* $x = 01101$ *partiendo del estado* $[e]$ *presente la misma salida que la calculada en (i).*

**Solución.** (i) La tabla de computación pedida es

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| $e_3$ | $e_4$ | $e_4$ | $e_4$ | $e_1$ | $e_2$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |

(ii) Para minimizar el autómata debemos localizar los estados equivalentes. Para ello, usaremos las relaciones de equivalencia $\sim_k$ definidas en el problema 3 de Problemas Propuestos: Autómatas, mediante

$$e \sim_k e' \iff \psi(e, x) = \psi(e', x), \ \forall x \in \Omega_{S_1} \quad \text{tal que } l(x) \leq k,$$

donde $l(x)$ es la longitud de la palabra $x$. Observamos que

1. $E/\sim_1 = \{[e_1]_1, [e_2]_1, [e_4]_1\}$, siendo $[e_1]_1 = \{e_1, e_3\}$, $[e_2]_1 = \{e_2, e_5\}$ y $[e_4]_1 = \{e_4, e_6\}$.

2. $E/\sim_2 = \{[e_1]_2, [e_2]_2, [e_4]_2, [e_6]_2\}$, siendo $[e_1]_2 = \{e_1, e_3\}$, $[e_2]_2 = \{e_2, e_5\}$, $[e_4]_2 = \{e_4\}$ y $[e_6]_2 = \{e_6\}$.

3. $E/\sim_3 = \{[e_1]_3, [e_2]_3, [e_4]_3, [e_6]_3\}$, siendo $[e_1]_3 = \{e_1, e_3\}$, $[e_2]_3 = \{e_2, e_5\}$, $[e_4]_3 = \{e_4\}$ y $[e_6]_3 = \{e_6\}$.

Por tanto, como $E/\sim_2 = E/\sim_3$, se sigue que $E/\sim = E/\sim_2 = \{[e_1], [e_2], [e_4], [e_6]\}$, siendo $[e_1] = \{e_1, e_3\}$, $[e_2] = \{e_2, e_5\}$, $[e_4] = \{e_4\}$ y $[e_6] = \{e_6\}$ y el autómata que minimiza al dado tiene por conjunto de símbolos de entrada y salida a $S_1$ y $S_2$, respectivamente, conjunto de estados a $\overline{E} = E/\sim$ y funciones $\overline{\delta}$ y $\overline{\lambda}$ definidas por

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $[e_1]$ | $[e_4]/0$ | $[e_2]/1$ |
| $[e_2]$ | $[e_1]/1$ | $[e_2]/1$ |
| $[e_4]$ | $[e_1]/1$ | $[e_4]/0$ |
| $[e_6]$ | $[e_2]/1$ | $[e_4]/0$ |

(iii) Basta considerar la clase de equivalencia a la que pertenece $e_3$, esto es $[e_1]$.

5. *Se considera la máquina de Moore* $M = (S_1, S_2, E, \delta, \beta)$*, tal que* $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$*,* $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$ *y funciones* $\delta$ *y* $\beta$ *dadas por la siguiente tabla:*

| | *0* | *1* | |
|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_6$ | $e_6$ | *0* |
| $e_2$ | $e_3$ | $e_6$ | *1* |
| $e_3$ | $e_4$ | $e_4$ | *1* |
| $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | *0* |
| $e_5$ | $e_2$ | $e_6$ | *1* |
| $e_6$ | $e_4$ | $e_4$ | *1* |

*Hallar la máquina de Melay* $A$ *equivalente a* $M$*.*

**Solución.** La máquina de Melay A $= (S_{1A}, S_{2A}, E_A, \delta_A, \lambda)$ que buscamos tiene por conjunto de entradas y salidas a $S_1$ y $S_2$, respectivamente, por conjunto de estados $E_A$ a $E$, por función $\delta_A$ a $\delta$ y por función $\lambda$ a $\beta \circ \delta$.

6. *Se considera el autómata* $A = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$*, con* $S_1 = S_2 = \{1, 2, 3\}$*,* $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ *y las funciones* $\delta$ *y* $\lambda$ *dadas en la siguiente tabla:*

| | *1* | *2* | *3* |
|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$<br>1 | $e_1$<br>3 | $e_1$<br>1 |
| $e_2$ | $e_3$<br>3 | $e_1$<br>1 | $e_1$<br>2 |
| $e_3$ | $e_1$<br>1 | $e_2$<br>2 | $e_1$<br>1 |

*Hallar una máquina de Moore que sea equivalente a A.*

**Solución.** La máquina de Moore $\mathrm{M} = (S_1, S_2, E_1, \delta_1, \beta)$ que buscamos está definida por $E_1 = E \times S_2$, $\delta_1((e_i, j), k) = (\delta(e_i, k), \lambda(e_i, k))$ y $\beta(e_i, j) = j$ para $i, j, k = 1, 2, 3$.